Modelos matemáticos y numéricos para biomecánica cardiovascular

Ingeniería Biomédica

J.M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

11 de noviembre de 2024
Conferencia programa de doctorado – Univ. de Sevilla

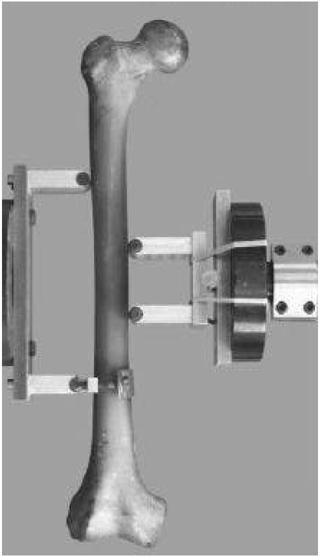
Índice

Índice

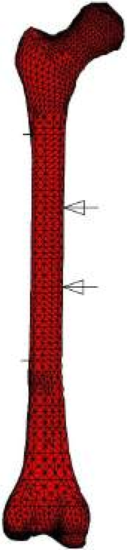
Ingeniería Biomédica

- La Ingeniería Biomédica tiene como objetivo desarrollar y aplicar la tecnología al servicio de la medicina.
- Abarca distintos campos:
  - Dispositivos eléctricos y electrónicos, instrumentación
  - Datos y señales médicas, redes, Inteligencia artificial
  - Imágenes biomédicas
  - Biomecánica y biomateriales
- Aquí nos centraremos en la Biomecánica computacional en aplicaciones cardiovasculares.
- Motivación para su estudio y desarrollo:
  1. Contribuye a salvar vidas y mejorar la salud
  2. Incluye retos complejos de tipo matemático / numérico / multidisciplinar

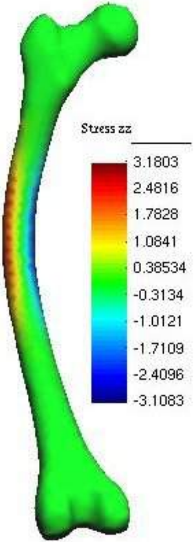
Biomecánica computacional: Fémur Estándar



Modelo de E.F.



Resultados: tensión σ_{zz}



Biomecánica computacional: Prótesis hombro

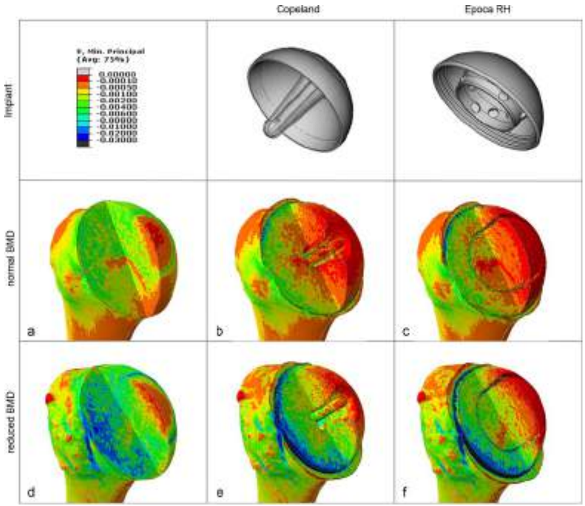


Fig. 2 Compressive strains of two humeral FE models (normal BMD (a–c) and reduced BMD (d–f) before and after virtual implantation of two different CSRA designs (centered-stem Copeland (b, e) and conical-crown Epoca RH (c, f)). The bone is highly unloaded (...

Stress-shielding induced bone remodeling in cementless shoulder resurfacing arthroplasty: a finite element analysis and in vivo results. Journal of Biomechanics, Volume 47, Issue 14, 2014, 3509 - 3516

Biomecánica computacional: pieza dental

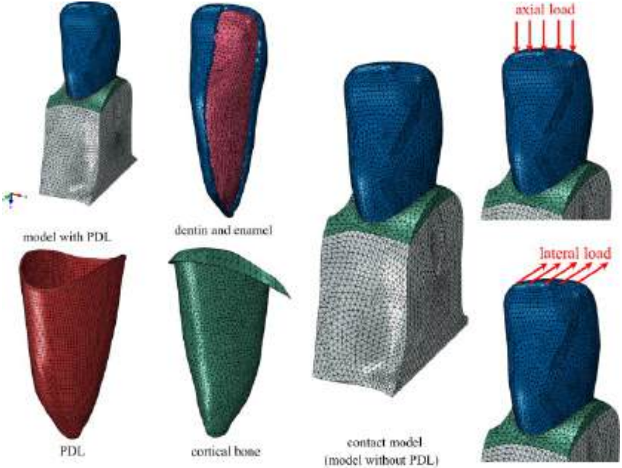


Fig. 1 FE model of central maxillary incisor with and without PDL under intrusive (axial) loading and lateral loading.

Finite element simulation of the behavior of the periodontal ligament: A validated nonlinear contact model
Journal of Biomechanics, Volume 47, Issue 12, 2014, 2883 - 2890

Biomecánica computacional: disco intervertebral

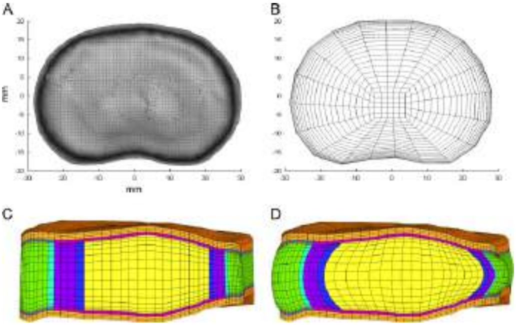


Fig. 2 (A) Axial view of mean disc geometry. (B) 2D mesh created using axial silhouette of mean disc geometry. (C) Mid-sagittal plane-cut of complete vertebra–disc–vertebra segment after 3D extrusion and meshing. (D) Final mesh after simulated hydration in

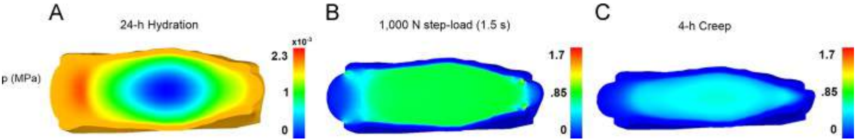
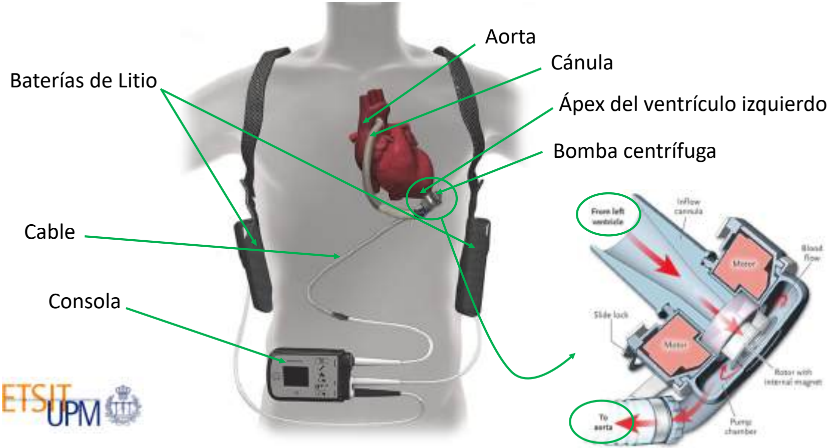


Fig. 5 Fluid pressure (MPa) at the end of the 24 h hydration (A), immediately following the application of the 1000 N step-load (B), and after 4 h of creep (C).

Validation and application of an intervertebral disc finite element model utilizing independently constructed tissue-level constitutive formulations that are nonlinear, anisotropic, and time-dependent

DISPOSITIVOS DE ASISTENCIA VENTRICULAR: HeartMate 3^{TM}



ESTUDIO Y SIMULACIÓN BIOMECÁNICA (TFG A. Aranguren, 2021)

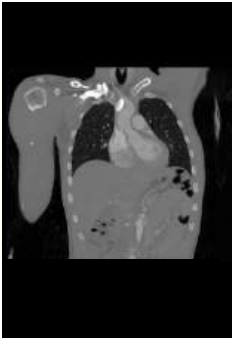
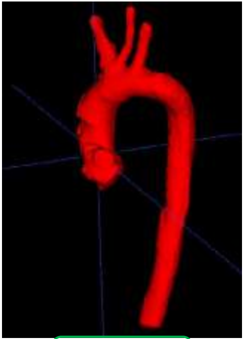
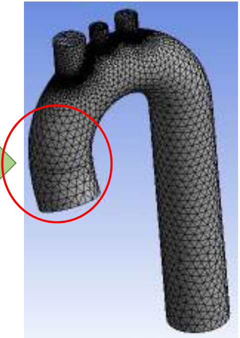


Imagen TAC



Segmentación ITK-SNAP

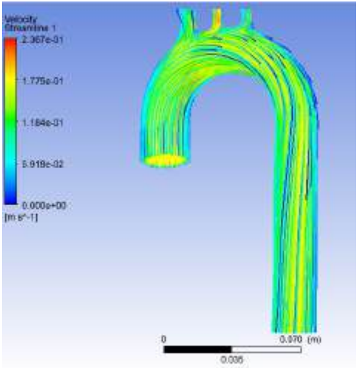


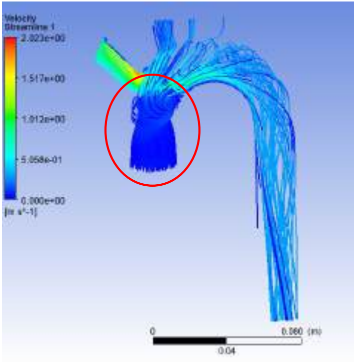
Malla de volúmenes finitos Ansys Fluent

VOLÚMENES FINITOS → NAVIER-STOKES

Dinámica de Fluidos – Hemodinámica (3)

ESTUDIO Y SIMULACIÓN BIOMECÁNICA (TFG A. Aranguren, 2021)

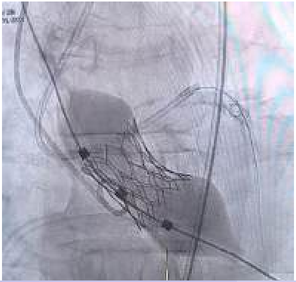


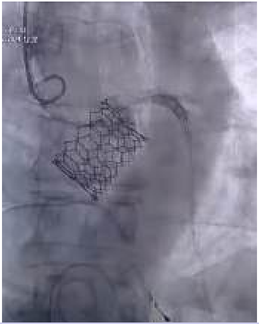


Ausencia de vórtices y de zonas con velocidad nula

Vorticidad y zonas con velocidad nula → estancamiento, aneurismas...

Implantación Válvula Aórtica con balón (TAVI)





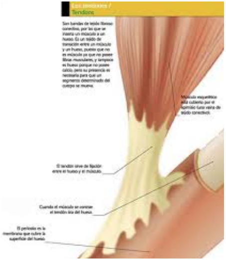
Servicio de Hemodinámica, Hospital P de Hierro Majadahonda
Imágenes: Ana Bueno, María Maqueda
06/11/2024

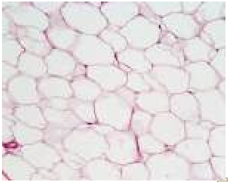
Índice

Tejidos blandos

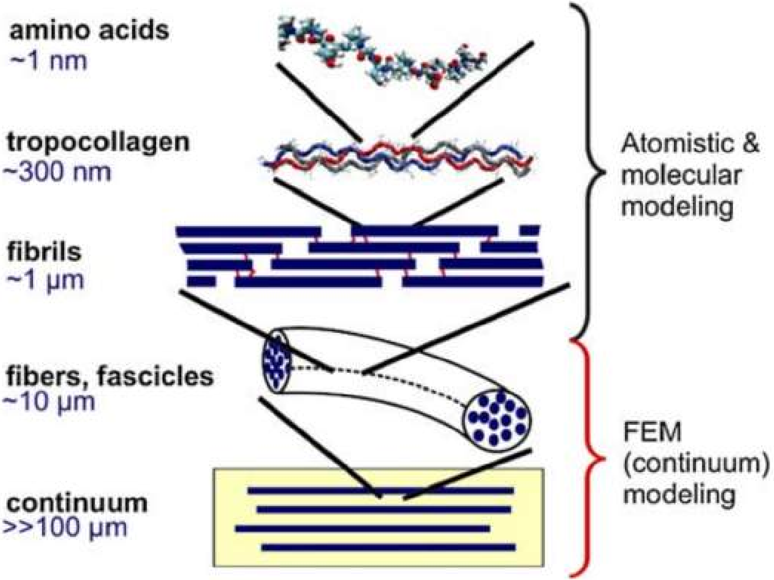
Definición

- Tejidos que conectan, soportan o rodean otras estructuras y órganos del cuerpo, sin ser hueso.
- Los tejidos blandos incluyen tendones, ligamentos, fascia, piel, tejidos fibrosos, la grasa y las membranas sinoviales (que son tejido conectivo), y los músculos, nervios y vasos sanguíneos



Distintas escalas del tejido



Propiedades en las distintas escalas

Molecular Mechanics

- Intermolecular forces
- Single molecule biopolymer mechanics
- Formation and dissolution of bonds
- Motion at the molecular/macromolecular level

Celular Mechanics

- Structure/function/properties of the cell
- Biomembranes
- The cytoskeleton
- Cell adhesion and aggregation
- Cell migration

Tissue Mechanics

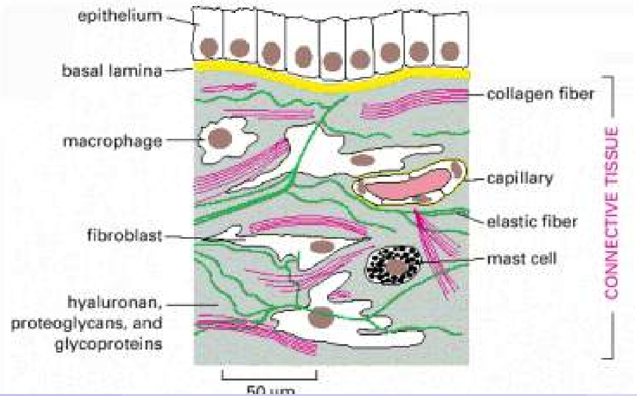
- Molecular structure --> physical properties
- Continuum, elastic and inelastic models
    * Viscoelasticity - viscodamage
    * Poroelasticity
    * Electrochemical effects on tissue properties
- Coupled thermo/hydro/chemical/mechanical models

length scale

Matriz extracelular del tejido blando (ECM)

Definición

- Red compleja de polisacáridos (como glicosaminoglicanos [GAGs] o celulosa) y proteínas (como colágeno) segregadas por las células.
- Sirve como elemento estructural en los tejidos y también influye en su desarrollo y fisiología



Matriz extracelular del tejido blando (ECM)

Componentes

- La estructura de la ECM varía con el órgano al que pertenece;
- Las distintas ECM comprenden varios tipos de macromoléculas (principalmente colágeno, elastina, GAGs) y agua (65 %)

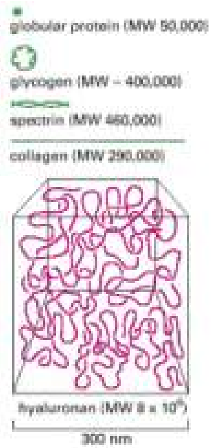
Propiedades físicas de la ECM

- Resistencia a **tracción** → Proteínas fibrosas formando colágenos
- Resistencia a **compresión** → formación de geles hidratados GAGs y PGs (Proteoglicanos)
- **Recuperación elástica** → polimerización de proteína de elastina

La variabilidad en la contribución relativa de los componentes refleja las necesidades del microambiente local y la función de los tejidos

Matriz extracelular del tejido blando

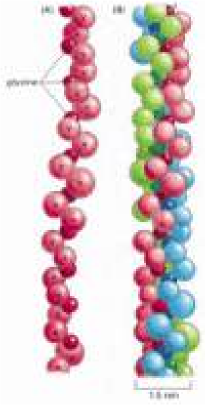
Glicosaminoglicanos (GAGs)



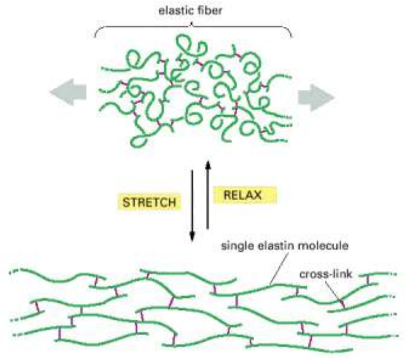
- Los GAGs tienden a adoptar configuraciones muy extendidas que ocupan un volumen enorme en relación con su masa
- Principalmente Ácido Hialurónico
- Su alta densidad de cargas negativas atrae a una nube de cationes (Na+), osmóticamente activos, aportando grandes cantidades de agua a la matriz.
- Esto crea una presión de hinchamiento que permite a la matriz resistir fuerzas de compresión, con respuesta viscoelástica
- Los GAGs a menudo forman uniones covalentes con los núcleos de las proteínas, formando Proteoglicanos (PGs).

Matriz extracelular del tejido blando

Colágeno



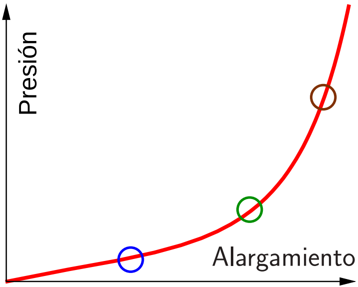
- Proteína fibrosa rica en glicina y prolina que es un componente principal de la matriz extracelular y de los tejidos conectivos. Diversas formas: el tipo I, el más común, se encuentra en la piel, tendones y hueso; tipo II en cartílagos; tipo IV en láminas basales.
- Una molécula típica de colágeno es una estructura helicoidal rígida con tres cadenas de polipéptidos enroscados entre sí formando una superhélice con forma de cordón
- Estas moléculas de colágeno se ensamblan en polímeros de orden mayor denominados fibrillas de colágeno, estructuras muy delgadas (10–300 nm de diámetro) y largas (centenares de μm en tejidos maduros)



- Proporciona a los tejidos la resiliencia necesaria para recuperar la forma después de una extensión
- Las fibras de elastina son muy extensibles: al menos 5 veces más que una tira de goma de la misma sección transversal
- Se combinan con fibrillas inelásticas y largas de colágeno, entrelazadas con las fibras elásticas para limitar la magnitud de la extensión y prevenir el desgarro del tejido

Composición y propiedades mecánicas

- Respuesta *geométrica no lineal:* grandes desplazamientos y deformaciones
- Respuesta *no lineal del material:* elastina + colágeno, reclutamiento y alineamiento progresivos
- *Incompresibilidad* (fase acuosa)



- *Anisotropía*, direcciones preferentes de fibras de colágeno
- Comportamiento *reológico (viscoelástico)* y *"pseudoelástico"*
- Adaptación a acciones externas. *Remodelación:* variación de características geométricas o mecánicas
- *Tensiones iniciales* en la configuración sin cargas
- Tono y actividad muscular

Reclutamiento de las fibras de colágeno

Curva tensión-deformación de tejido con colágeno

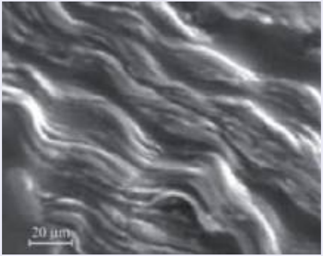
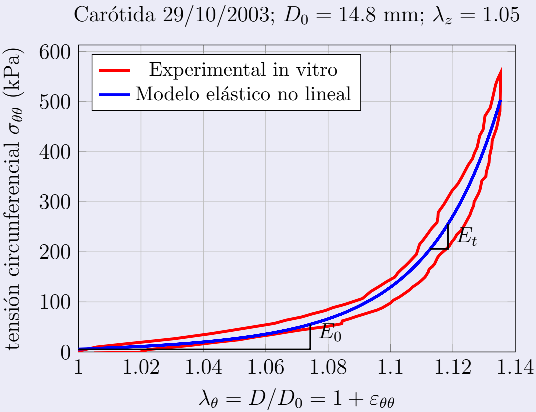


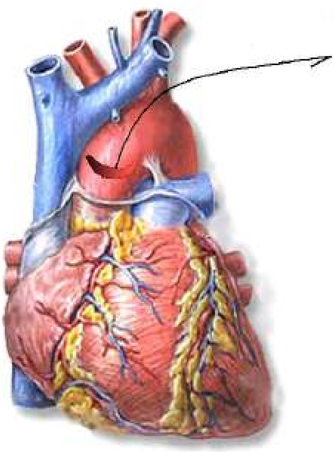
Imagen ESEM de adventicia humana, mostrando estructura ondulada y con alineaciones preferentes de fibras de colágeno

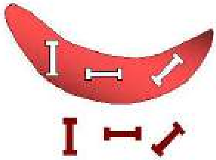
(FELMI, TU Graz 2009)



Medida experimental y modelo teórico
JG,CGH 2003

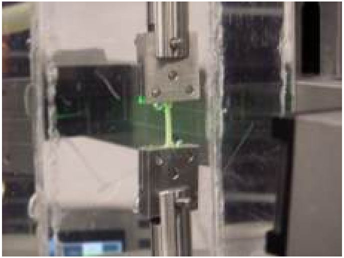
Caracterización experimental – Tracción (1)



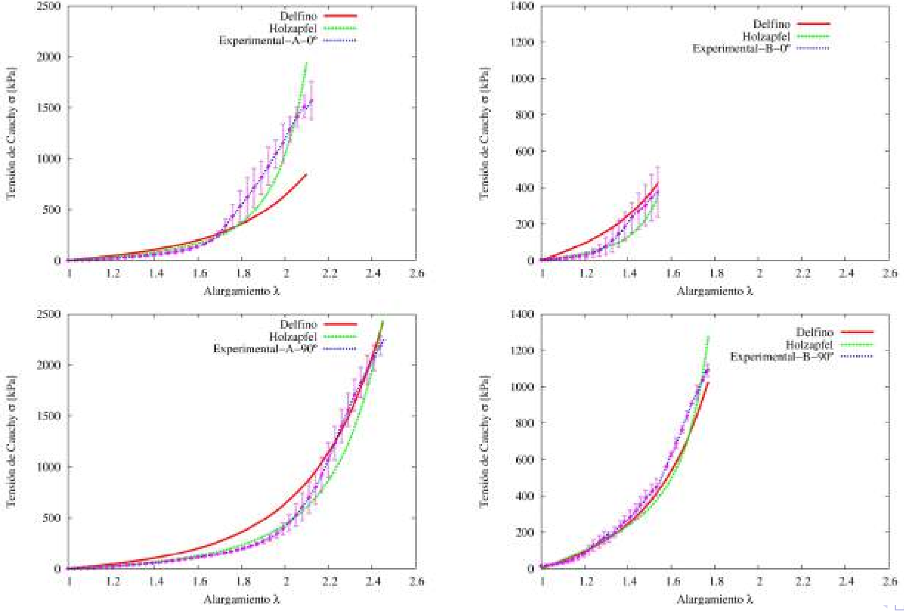


Distintos grupos: A) pacientes sanos/donantes; B) problemas valvulares; C) válvula bicúspide; D) aneurismáticos; E) Marfan

Caracterización experimental – Tracción (2)

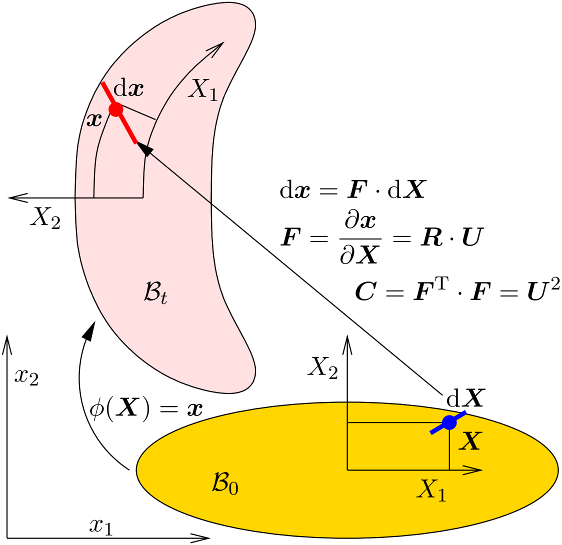


Caracterización experimental – Tracción (3)



Índice

Medidas de deformación: $\boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}$ (libres de rotación)



$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2$$

Cinemática: grandes deformaciones y rotac. (I)

- Cinemática: gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{x}\,; \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J} = x_{i,J}$$

- Se descompone como alargamiento $\boldsymbol{U}$ seguido de rotación $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}$$

- Considerando $\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{R} = \mathbf{1}$, se obtienen medidas de deformación que no dependen de las rotaciones:

Cauchy-Green derecha: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2;$

Green-Lagrange: $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \mathbf{1})$

  - Intrínsecas para cuantificar la extensión de las fibras del material (no dependen de la rotación)
  - No lineales en función de los desplazamientos $\boldsymbol{u}$

Cinemática: grandes deformaciones y rotac. (II)

- Expresándolas en direcciones principales, en función de los alargamientos principales:

$$[\boldsymbol{U}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}; \; [\boldsymbol{C}] = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix};$$

$$[\boldsymbol{E}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 - 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

- Alternativamente, para los modelos isótropos, se pueden formular en función de los invariantes de $\boldsymbol{C}$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2;$$

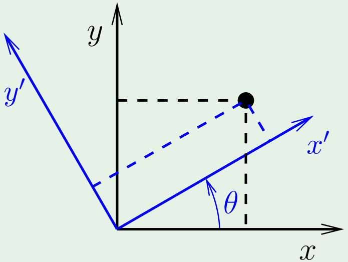
$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \quad (5)$$

Principio de Objetividad

La respuesta mecánica (tensión) debe ser independiente del observador; para ello la medida de la deformación en un simple cambio de referencia debe anularse: los movimientos de sólido rígido del sistema de referencia no deben producir tensiones..

Ejemplo: rotación rígida de sistema de referencia (2D):

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-T}} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$



Cada partícula (x, y) pasa a las coordenadas (x, y) en el nuevo sistema.
Note: this is a *passive* rotation of reference frame, different to an *active* rotation of the body. For an active rotation the matrix would be the transpose $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$, to be applied to the *material* coordinates

Error cometido con pequeñas deformaciones (II)

Consecuencias del principio de objetividad

Desplazamientos originados por el cambio de referencia:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

Derivando, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (tensor de deformaciones lineal):

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\theta^2/2 & 0 \\ 0 & -\theta^2/2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Rotaciones moderadas dan lugar a errores importantes. Supongamos:

- Deformaciones $\varepsilon \approx 10^{-3}$, típicas de materiales estructurales;
- Rotaciones $\theta \approx 10^{-1}$ $(5{,}7^\circ)$, típicas de estructuras esbeltas;

Error cometido: según (6), del orden θ^2, es decir $\approx 10^{-2}$ $(10 \times \varepsilon)$.

Cinemática: grandes deformaciones y rotaciones

- El tensor de deformaciones de Green-Lagrange se puede expresar también en función de los desplazamientos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$, a partir de su gradiente $\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u} = \partial \boldsymbol{u} / \partial \boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u})^{\mathsf{T}} + \underbrace{(\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u}}_{\text{t. cuadráticos}}\right)$$

- La expresión anterior, a diferencia del tensor de deformaciones lineal ε, contiene términos cuadráticos (no lineales)

Modelos de elasticidad no lineal – Hiperelasticidad

- Postulado fundamental de modelos hiperelásticos: ∃ densidad de energía elástica por unidad de volumen, función de una medida objetiva (intrínseca) de la deformación:

$$W(\boldsymbol{C}) = \hat{W}(\boldsymbol{U}) = \tilde{W}(\boldsymbol{E}) \tag{7}$$

- El tensor de tensiones 2.º de Piola-Kirchhoff ($\boldsymbol{S}$, PK2) mide la tensión por unidad de superficie en la configuración inicial. La relación con el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ es

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \tag{8}$$

- Las tensiones PK2 $\boldsymbol{S}$ son conjugadas de las deformaciones de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$, y se pueden obtener derivando W:

$$\delta W = \boldsymbol{S}:\delta\boldsymbol{E} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S} = \frac{\partial\tilde{W}}{\partial\boldsymbol{E}} = 2\frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{C}} = \mathfrak{f}(\boldsymbol{U}) \tag{9}$$

- Nos interesa la respuesta para la tensión verdadera (Cauchy), aplicando la transformación con la tensión PK2:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= J^{-1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathsf{T}}\\ &= (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})\cdot(J^{-1}\boldsymbol{S})\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}})\\ &= \boldsymbol{R}\cdot\underbrace{[\det(\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}\cdot\mathfrak{f}(\boldsymbol{U})\cdot\boldsymbol{U}]}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathfrak{g}(\boldsymbol{U})}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

- Es decir, $\boldsymbol{\sigma}$ se puede expresar de forma objetiva (invariante respecto a rotaciones), de la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{R}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$$

donde $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathfrak{g}(\boldsymbol{U}) = \mathfrak{g}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$ define la respuesta intrínseca del material, que debe después rotarse mediante $\boldsymbol{R}$.

Ecuaciones constitutivas – expresiones analíticas

- En función de los alargamientos principales:

$$S_i = \frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\,; \quad \sigma_i = \frac{1}{J}\lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \quad (i \text{ no sumado})$$

- Material incompresible: $1 = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, presión p indeterminada:

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p$$

- Ensayo de tensión uniaxial (incompresible):

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}}$$

Variables monitorizadas por defecto en FEBio

Tensiones σ (Cauchy)

X - stress
Y - stress
Z - stress
XY - stress
YZ - stress
XZ - stress
Effective stress
1 Principal stress
2 Principal stress
3 Principal stress
1 Dev Principal stress
2 Dev Principal stress
3 Dev Principal stress
Max Shear stress

σ_{ij}, $\bar{\sigma} = \sigma_{\text{mis}}$
$(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_3)$
(s_1, s_3, s_3)
τ_{max}

Deformaciones E (Green-Lag.)

X - Lagrange strain
Y - Lagrange strain
Z - Lagrange strain
XY - Lagrange strain
YZ - Lagrange strain
XZ - Lagrange strain
Effective Lagrange strain
1 Principal Lagrange strain
2 Principal Lagrange strain
3 Principal Lagrange strain
1 Dev Principal Lagrange strain
2 Dev Principal Lagrange strain
3 Dev Principal Lagrange strain
Max Shear Lagrange strain

E_{IJ}, $\bar{E}$
(E_1, E_3, E_3)
(E'_1, E'_3, E'_3)
$E_{\text{corte,max}}$

Modelo de St Venant–Kirchhoff (compresible)

- Extensión de la elasticidad lineal isótropa a grandes deformaciones:

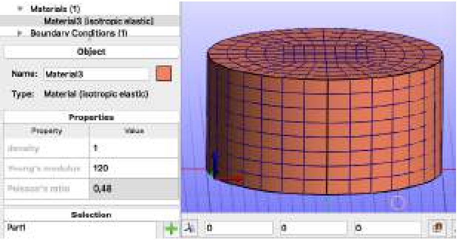
$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{S} = \Lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{E})\mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{E}$$

tan solo cambiando: $\boldsymbol{\varepsilon} \to \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{S}$

- Corresponde a la función de densidad de energía

$$W = \frac{1}{2}\Lambda(\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}))^2 + \mu\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{E}^2)$$

FEBio: St. venant-Kirchhoff = Isotropic Elastic



A partir de E, ν:

Young $\quad E = \mu\dfrac{2\mu + 3\Lambda}{\mu + \Lambda}$

Poisson $\quad \nu = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Lambda}{\mu + \Lambda}$

Modelo de St Venant–Kirchhoff (compresible)

- La expresión analítica para las tensiones (de Cauchy) se obtiene mediante (9) y (8):

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\left[\frac{\Lambda}{2}(I_1 - 3)\boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b} - \mathbf{1})\right]$$

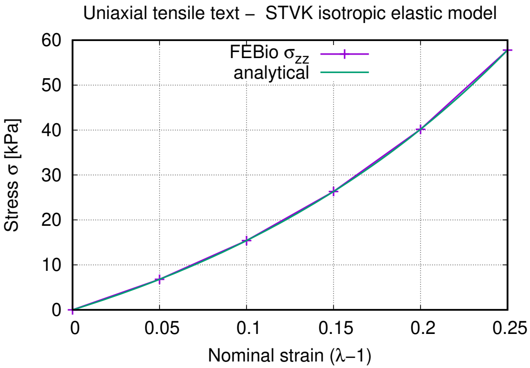
$$\text{con} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{\mathsf{T}} \quad \text{(Cauchy-Green izquierda)}$$

- Para el ensayo de tensión uniaxial homogénea resulta

$$\boxed{\sigma_1 = J^{-1}\frac{\mu}{2}\frac{3\Lambda + 2\mu}{\Lambda + \mu}\lambda_1^2(\lambda_1^2 - 1),} \quad \text{con } J = \frac{(3\Lambda + 2\mu - \Lambda\lambda_1^2)\lambda_1}{2(\Lambda + \mu)}$$

- Es un modelo que sólo debe aplicarse para deformaciones pequeñas o moderadas (como huesos)

Modelo de St Venant–Kirchhoff (compresible)



Ejemplo:

- para $E = 120\,\text{kPa}, \nu = 0{,}48$ (incompresible: $\nu = 0{,}50$)
- Resulta inestable por encima de $\lambda - 1 = \varepsilon = 0{,}7$

Modelo Neohookeano incompresible

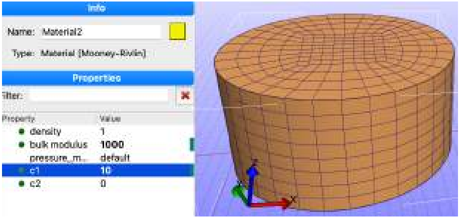
- Hiótesis de incompresibilidad:

$$1 = J = \det(\boldsymbol{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

- Observación: numéricamente en EF la incompresibilidad se impone de forma aproximada (Modelos desacoplados cuasi-incompresibles, con $K \gg \mu \;\rightarrow\; J \approx 1$.)
- Función de densidad de energía:

$$W = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3)\,, \quad \text{siendo } I_1 = \operatorname{tr} \boldsymbol{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

FEBio: Neohookeano = Mooney-Rivlin con $c_2 = 0$



Siendo

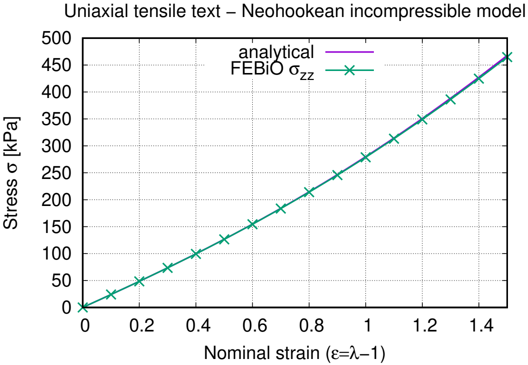
$$c_1 = \frac{\mu}{2}$$

Bulk $\quad K \gg c_1$

Modelo Neohookeano incompresible

- Para el caso de tensión uniaxial, y teniendo en cuenta que por incompresibilidad $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2^2 = 1/\lambda_1$,

$$\sigma_1 = \lambda_1\mu\lambda_1 - \lambda_2\mu\lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = \mu\left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right)}$$



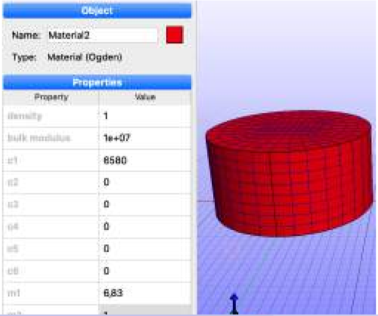
Modelo de Ogden

- Función de densidad de energía

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{C_i}{a_i} \left(\lambda_1^{a_i} + \lambda_2^{a_i} + \lambda_3^{a_i} - 3 \right)$$

- Expresión de tensión–alargamiento uniaxial:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} C_i \left(\lambda^{a_i} - \lambda^{-a_i/2} \right) ,$$



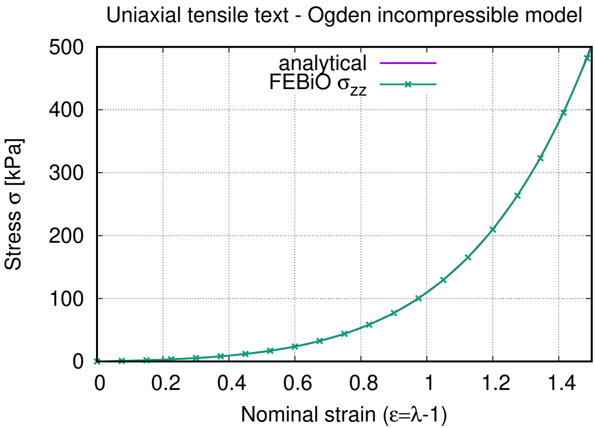
FEBio: uncoupled elastic – Ogden, con

$$N = 1$$
$$C_i = c_i / m_i$$
$$a_i = m_i$$
$$K \gg c_1$$

Modelo de Ogden

Consideramos aquí por simplicidad un modelo con un único término ($N = 1$). En este caso, la relación tensión–alargamiento será

$$\boxed{\sigma = C_1 \left(\lambda^{a_1} - \lambda^{-a_1/2} \right) .} \tag{10}$$



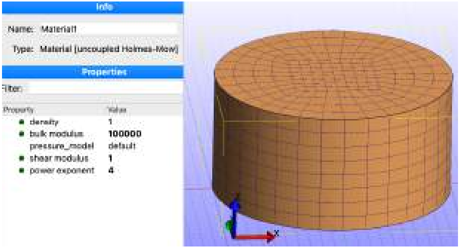
Modelo de Demiray incompresible (1)

- Hiótesis de incompresibilidad:

$$1 = J = \det(\boldsymbol{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

- Observación: numéricamente en EF la incompresibilidad se impone de forma aproximada (modelos desacoplados cuasi-incompresibles)
- Función de densidad de energía:

$$W = \frac{a}{b}\left[\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(I_1 - 3)} - 1\right], \quad \text{siendo } I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{C} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$



FEBio: uncoupled Holmes-Mow, con

$$\begin{aligned} \mu &= a && \text{(shear modulus)} \\ \beta &= b/2 && \text{(power exponent)} \\ K &\gg a && \text{(bulk modulus)} \end{aligned}$$

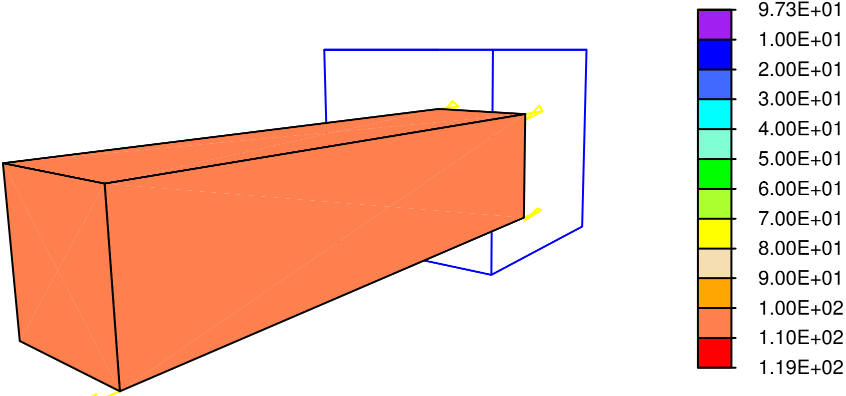
Modelo de Demiray incompresible (2)

- Para el caso de tensión uniaxial, y teniendo en cuenta por incompresibilidad $\lambda_2^2 = 1/\lambda_1$, y por tanto $I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}$:

$$\sigma_1 = \lambda_1^2 a \, \mathrm{e}^{\frac{b}{2}(I_1-3)} - \lambda_2^2 a \, \mathrm{e}^{\frac{b}{2}(I_1-3)}$$

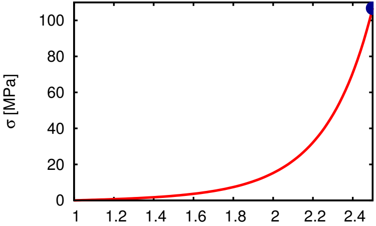
$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_1 = a \, \mathrm{e}^{\frac{b}{2}(I_1-3)} \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right)}, \quad \text{siendo } I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}$$

Extensión Uniaxial Demiray

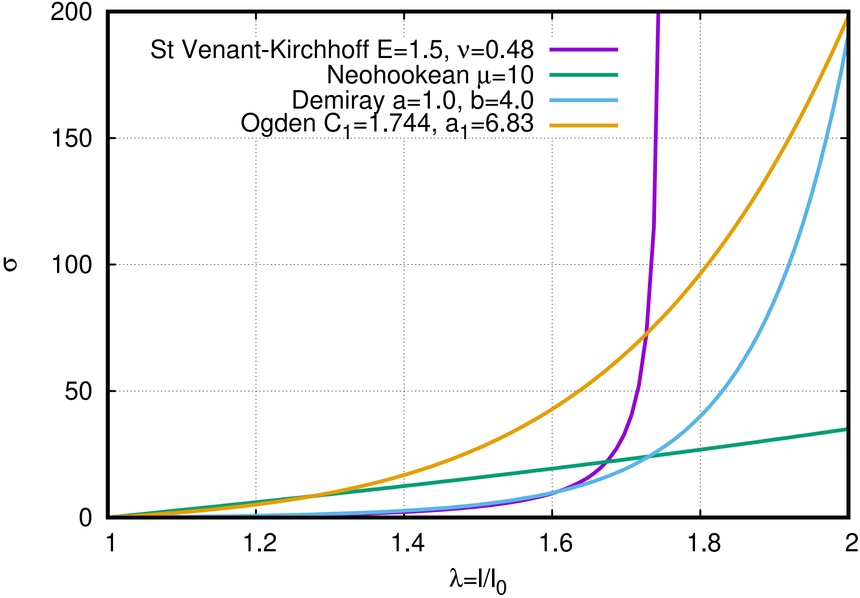


$$W = \frac{a}{b}\left[\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(I_1-3)} - 1\right]$$

siendo $\begin{cases} a = 1071{,}9\,\text{kPa} \\ b = 1{,}4 \end{cases}$

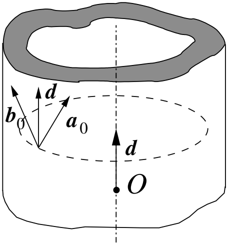


Comparación de modelos hiperelásticos



Modelos hiperelásticos anisótropos

- Fibras de Colágeno con direcciones preferentes. Definidas en la configuración de referencia por los vectores unitarios $\boldsymbol{a}_0$ y $\boldsymbol{b}_0$, formando ángulos $\pm\alpha$ con el eje de la arteria. La energía de deformación está expresada por $W(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{b}_0)$.



- Pseudo-invariantes (Spencer [CISM 1984]): $W = W(\{I_a\}),\ a = 1, \ldots, 9,$

$$I_4 = \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{a}_0, \quad I_5 = \boldsymbol{a}_0 \cdot \boldsymbol{C}^2 \cdot \boldsymbol{a}_0, \quad I_6 = \boldsymbol{b}_0 \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{b}_0,$$

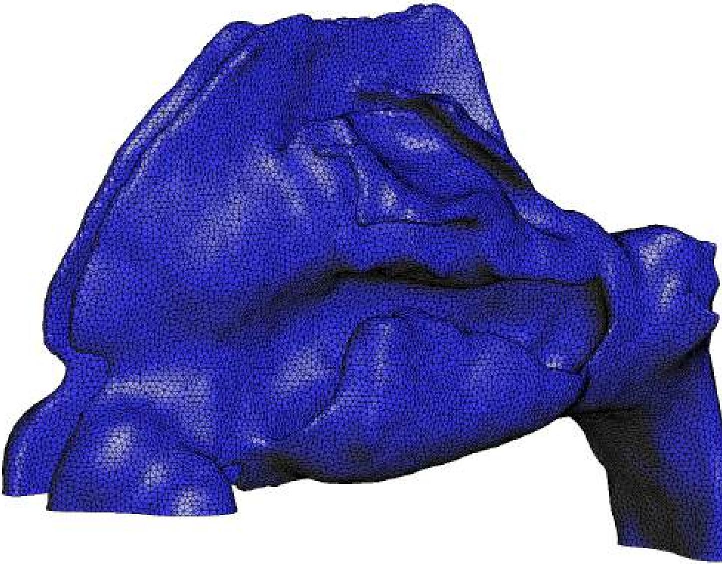
- Para el tejido arterial *(Holzapfel & Gasser [J. Elast. 2000])*:

$$\boxed{W = \underbrace{\frac{K}{2}\log^2 J}_{\text{volum.}} + \underbrace{\frac{c}{2}(\bar{I}_1 - 3)}_{\text{neo-hooke}} + \underbrace{\frac{k_1}{2k_2}\sum_{a=4,6}\left(\exp\left(k_2(\bar{I}_a - 1)^2\right) - 1\right)}_{\text{fibras}}}$$

Índice

- La Biomecánica de fluidos estudia el flujo de fluidos biológicos; para lo cual son muy útiles técnicas numéricas como la *Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)*
- Uno de los campos más importantes es el flujo sanguíneo o hemodinámica.
- Otros problemas en biomecánica de fluidos:
  1. Flujo de aire en la respiración (pulmones, tráquea, etc.)
  2. Flujo nefrológico: difusión en los dializadores de urea, ...
  3. Flujo peristáltico: uretra, intestinal, estomacal, etc.
  4. Fluido sinovial de las articulaciones óseas.
  5. Válvulas del corazón: interacción fluido-tejido.

Ejemplo CFD: Respiración en cavidad nasal



CFD: Variables y ecuaciones

- Se supone que el fluido es un medio continuo, con la presión, densidad y velocidad como las 5 variables primarias; se trata de campos función de espacio y tiempo, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ y $\forall t$:

$$
\begin{aligned}
p &= p(\boldsymbol{x}, t) \\
\rho &= \rho(\boldsymbol{x}, t) \\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)
\end{aligned}
$$

- En consecuencia, se necesitan 5 ecuaciones independientes: 3 correspondientes al balance de cantidad de movimiento, 1 del balance de masa y 1 del balance de energía.
- Cuando la densidad es constante (independiente de la presión), el flujo se llama incompresible. Entonces quedan 4 ecuaciones independientes (no se considera el balance de energía), en función de las variables $(\boldsymbol{v}, p)$.

Modelos para CFD – caso general

- Expresando la ecuación fundamental de la dinámica (**balance de la cantidad de movimiento**), y suponiendo despreciables las fuerzas de volumen $\rho \boldsymbol{b}$, resultan las ecuaciones de Navier-Stokes del flujo general (compresible y con viscosidad):

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= \rho \boldsymbol{v}_{,t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{\mu}{3} \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) \\ \rho \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} &= \rho v_{i,t} + \rho v_{i,p} v_p = -p_{,i} + \mu v_{i,pp} + \frac{\mu}{3} v_{p,ip} \end{aligned}}$$

- En estas ecuaciones, los campos incógnita son $\rho(\boldsymbol{x}, t), p(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ (1+1+3=5 componentes)
- Adicionalmente deben considerarse las ecuaciones de balance de masa y energía, para un total de 5 ecuaciones escalares

Modelos para CFD – casos particulares (1)

- **Flujo incompresible**: el volumen específico y la densidad son constantes; la condición cinemática que lo expresa es

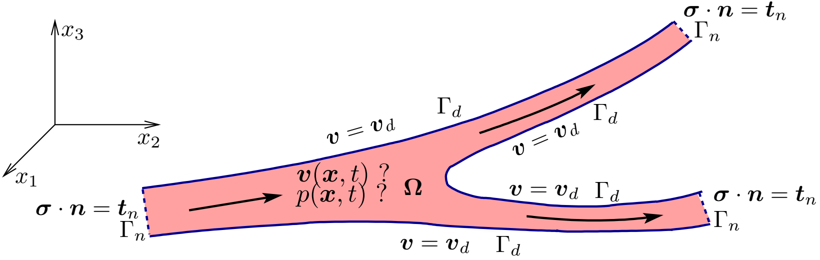
$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = v_{p,p} = 0\,;}$$

- se elimina por tanto el término $\cancel{\frac{\mu}{3}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})}$ y las ecuaciones de Navier-Stokes resultan

$$\boxed{\begin{aligned} \rho\boldsymbol{v}_{,t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\nabla^2\boldsymbol{v} \\ \rho v_{i,t} + \rho v_{i,p}v_p &= -p_{,i} + \mu v_{i,pp} \end{aligned}}$$

- Importante: prácticamente **todos los casos de fluidos en biomecánica se pueden considerar incompresibles** (hemodinámica, respiración. . .)

$$
\begin{aligned}
\rho \boldsymbol{v}_{,t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{v} && \text{en } \Omega \times (0,T) \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} &= 0 && \text{en } \Omega \times (0,T) \\
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_d(t) && \text{en } \Gamma_d \times (0,T) \\
\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{t}_n(t) && \text{en } \Gamma_n \times (0,T) \\
\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) &= \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) && \text{en } \Omega,\ t = 0
\end{aligned}
$$



Índice

Fenómenos básicos CFD – flujo de Poiseuille

- Caudal proporcional al gradiente de presión $p_{,x} = \dfrac{\partial p}{\partial x} \approx \dfrac{\Delta p}{L}$:

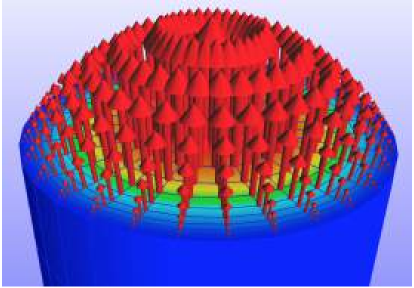
$$\boxed{Q = \frac{\pi}{8\mu}\frac{\Delta p}{L}R^4}$$

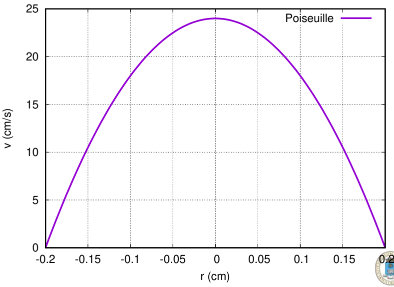
- La resistencia vascular es

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8\mu L}{\pi R^4}}$$

- El perfil de velocidades es parabólico:

$$\boxed{v(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L}(R^2 - r^2)}$$



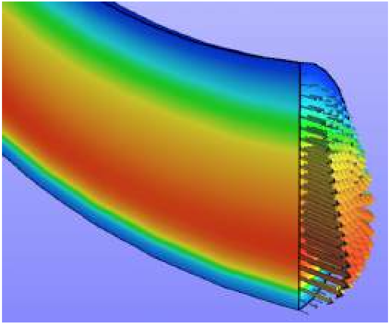


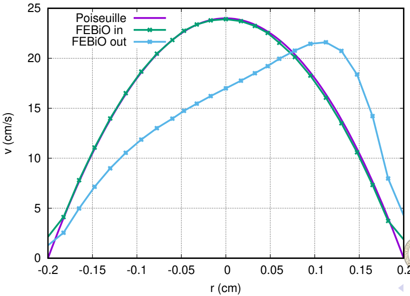
Fenómenos básicos CFD – flujo de Poiseuille (2)

Hipótesis del flujo de Poiseuille

1. La arteria es un tubo rígido
2. Sin curvatura y sección constante
3. Flujo estacionario
4. Flujo homogéneo con viscosidad constante
5. $\rightarrow$ Distribución parabólica

- Algunas hipótesis no se cumplen en las arterias reales: curvatura, flexibilidad, pulsatilidad, viscosidad no constante. . .





Mapa por RM 3D de flujo sanguíneo en aorta

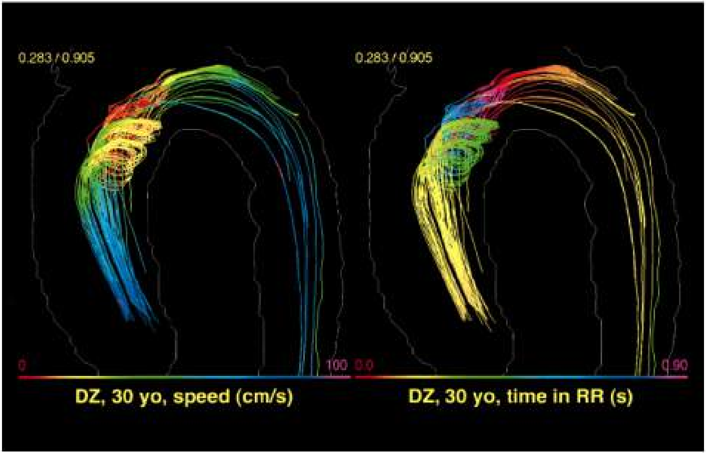


Figure 2. Sagittal oblique 4D reconstruction of the thoracic aortic blood flow displayed in 2D with velocities (left) and time of one heartbeat (right) of a 30-year-old normal male subject. Blood flowed from the proximal ascending aorta to the distal in early and mid-systole and then turned left and around clockwise in late systole and forward again in diastole. It took two beats to reach the distal descending aorta. Systolic velocities were 50–100 cm/sec, and diastolic were minimal to 10 cm/sec. Numbers in upper left corner: the aortic contour was drawn on an image taken 0.283 seconds after the R wave. R-R interval = 0.905 seconds.

Aplicaciones CFD – Arteria Coronaria

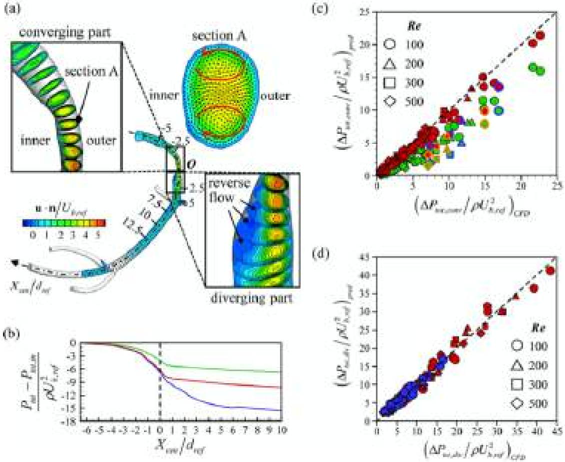


Fig. 4. Flow fields by 3D numerical simulation and non-dimensional total pressure drops predicted by the 0D model. (a) Contours of the instantaneous streamwise velocity in the converging and diverging parts and the cross-flow velocity vectors at the cross-section A of P22. (b) Non-dimensional total pressures along the centerline of P22 predicted by the converging-part model (Eq. (3)): , series of segmented straight and curved pipes; , series of segmented straight pipes only; , 3D numerical simulation. (c) Predicted non-dimensional total pressure drops versus those from 3D numerical simulation (CFD) in the converging parts of 33 stenoses: red symbols, series of segmented straight and curved pipes; green symbols, series of segmented straight pipes only (symbols outlined with blue and orange colors are the cases of P20 and P32, respectively). (d) Non-dimensional total pressure drops in the diverging part predicted by the diverging-part model (Eq. (5) with KRR): red, training set; blue, test set.

J. Kim et al, A zero-dimensional predictive model for the pressure drop in the stenotic coronary artery based on its geometric characteristics, J. Biomech 113, 2020.

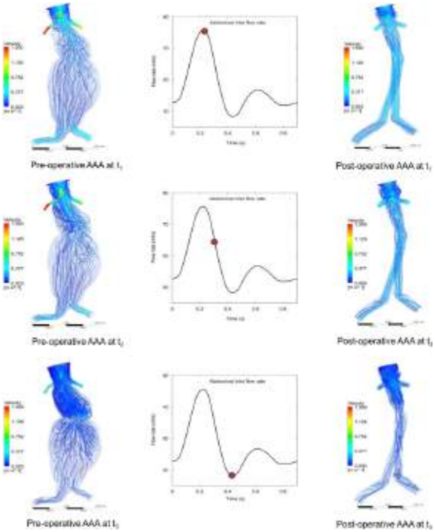


Fig. 4 Instantaneous velocity streamlines in pre- and post-operative AAA for patient 6, where t 1 , t 2 and t 3 are time levels at peak systole, maximum flow deceleration and terminal systole, respectively.

Patient-specific analysis of displacement forces acting on fenestrated stent grafts for endovascular aneurysm repair

Índice

Concepto EF 1 gdl – Formulación

- Trabajo virtual por ud. de volumen de las fuerzas elásticas:

$$\delta\hat{W}^{\mathsf{int}} = -\sigma\delta\varepsilon = -\sigma\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}v}\delta v = -\sigma B\delta v$$

- Operador de interpolación de deformaciones $B(v)$:

$$B = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}v}$$

- Permite también expresar las fuerzas internas:

$$\delta W^{\mathsf{int}} = -\left[\int_{\mathcal{B}} B\sigma\,\mathrm{d}V\right]\delta v \quad \Rightarrow \quad F^{\mathsf{int}}(v) = \int_{\mathcal{B}} B(v)\sigma(v)\,\mathrm{d}V$$

- Trabajo virtual de las fuerzas aplicadas:

$$\delta W^{\mathsf{ext}} = P\delta v$$

Concepto EF 1 gdl – Formulación

- Principio de los Trabajos Virtuales (PTV)

$$\delta W = \delta W^{\mathsf{ext}} + \delta W^{\mathsf{int}} = \delta v \left[P - \int_{\mathcal{B}} B\sigma \, \mathrm{dV} \right] = 0 \quad \forall \delta v$$

- Ecuación algebraica resultante

$$\Rightarrow \qquad \boxed{P = F^{\mathsf{int}}(v) = \textstyle\int_{\mathcal{B}} B\sigma \, \mathrm{dV}}$$

- Ley constitutiva (elasticidad, grandes deformaciones):

$$\sigma = E\varepsilon_G$$

Nota: ε_G es una medida para grandes deformaciones, como la deformación de Green-Lagrange

Concepto EF 1 gdl – Rigidez tangente

Ejemplo con 1 gdl (v), no lineal:

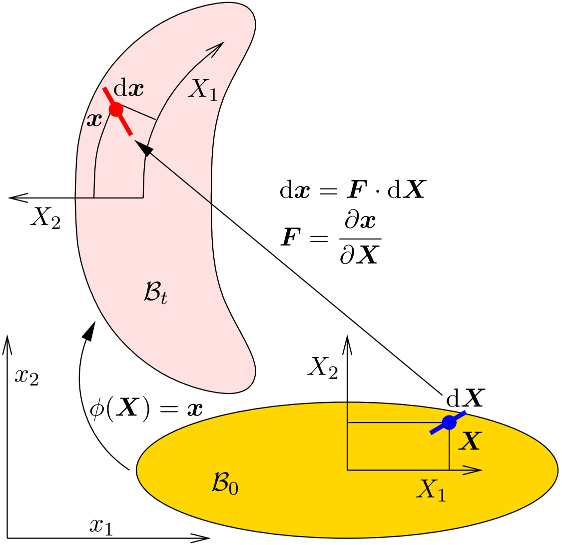
$$\varepsilon_G = b_0 v + \frac{1}{2} b_1 v^2 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_G}{\mathrm{d}v} = b_0 + b_1 v = B_0 + B_L(v)$$

$$\begin{aligned} K_T = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v} &= \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(B\sigma)\,\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{B}} BE\frac{\mathrm{d}\varepsilon_G}{\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}v}\sigma\,\mathrm{d}V \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} B_0 E B_0\,\mathrm{d}V}_{K_0} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} 2B_0 E B_L\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} B_L E B_L\,\mathrm{d}V}_{K_L(v)} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}v}\sigma\,\mathrm{d}V}_{K_\sigma(\sigma)} \end{aligned}$$

Componentes de la matriz de rigidez tangente K_T

- Rigidez constante, K_0 (modelos lineales: la única)
- Rigidez por grandes deformaciones o respuesta no lineal K_L
- Rigidez debida a las tensiones iniciales K_σ

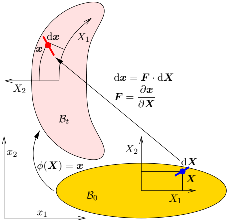
Índice



$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$
X_1
$\boldsymbol{x}$
X_2
$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}$
$\mathcal{B}_t$
x_2
X_2
$\mathrm{d}\boldsymbol{X}$
$\phi(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{X}$
$\mathcal{B}_0$
X_1
x_1

Cinemática: medidas no lineales de la deformación

- Es necesario diferenciar entre la configuración de referencia inicial $\mathcal{B}_0$ y la configuración actual del cuerpo $\mathcal{B}_t$ (o simplemente $\mathcal{B}$)
- Las medidas en la configuración inicial se denominan Lagrangianas o materiales y en la configuración actual Eulerianas o espaciales.



- El tensor de deformaciones lineal $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + (\boldsymbol{\nabla u})^{\mathsf{T}})$ tiene la ventaja de que la linealidad respecto a los desplazamientos $\boldsymbol{u}$, pero ...
- no es válido para tejidos blandos, ya que no es independiente (objetivo) respecto a las rotaciones rígidas e impide medir adecuadamente grandes deformaciones
- Las medidas de las deformaciones en tejidos blandos son no lineales respecto a los desplazamientos

Descripción Lagrangiana actualizada: ecuaciones

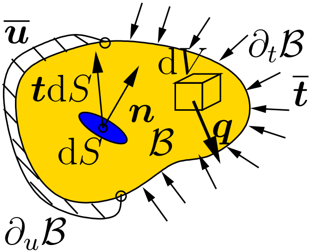
Formulación fuerte en 3D

Ecuaciones en el dominio

- Comportamiento elástico (no lineal)
  $\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{h}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R} \cdot \mathfrak{g}(\boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$
- Compatibilidad (deformaciones)
  $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u})^{\mathsf{T}} + (\boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\nabla}_X \boldsymbol{u}\right)$
- Equilibrio (tensiones):

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}$$

$$\sigma_{pi,p} + q_i = 0; \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



Condiciones de contorno

- en $\partial_t \mathcal{B}$: $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}}$ (naturales)
- en $\partial_u \mathcal{B}$: $\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}$ (esenciales)

Incógnitas

- Desplazamientos
  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^3$

PTV en descripción Lagrangiana actualizada (I)

- Se considera la ecuación de equilibrio (forma fuerte):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} + \boldsymbol{q} = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$$

- Ponderando (producto escalar) por un campo arbitrario (compatible) de desplazamientos virtuales $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$, e integrando en la configuración actual $\mathcal{B}$:

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}})\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}V = 0$$

- El integrando del primer término se puede transformar como

$$\boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}) - \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}:\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\eta}$$
$$\eta_q \sigma_{pq,p} = (\eta_q \sigma_{pq})_{,p} - \sigma_{pq}\eta_{q,p}$$

- Sustituyendo en la integral y aplicando el th. de la divergencia

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}})\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\mathcal{B}} (\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}:\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}V$$

PTV en descripción Lagrangiana actualizada (Ia)

En definitiva, la expresión del Principio de los trabajos virtuales se transforma como:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}) \, \mathrm{d}V}_{(*)} + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{q} \, \mathrm{d}V = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\int_{\partial\mathcal{B}} \underbrace{(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}) \cdot \boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\boldsymbol{t}}} \, \mathrm{d}S - \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}} : \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta}} \, \mathrm{d}V}^{(*)} + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{q} \, \mathrm{d}V = 0$$

PTV en descripción Lagrangiana actualizada (II)

- Considerando las condiciones de contorno ($\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ en $\partial_u\mathcal{B}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}}$ en $\partial_t\mathcal{B}$), definiendo las "*deformaciones virtuales*" $\boldsymbol{\varepsilon}^{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\nabla\eta} + (\boldsymbol{\nabla\eta})^{\mathsf{T}}\right]$ y por la simetría de $\boldsymbol{\sigma}$, se obtiene

$$\underbrace{-\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{:}\boldsymbol{\varepsilon}^{\eta}\,\mathrm{d}V}_{\delta W^{\mathsf{int}}} + \underbrace{\int_{\partial_t\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta}\cdot\bar{\boldsymbol{t}}\,\mathrm{d}S + \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{q}\,\mathrm{d}V}_{\delta W^{\mathsf{ext}}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathsf{comp}}$$

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \text{ en } \partial_u\mathcal{B} \quad \text{(C.C. esenciales)}$$

- Esta expresión se puede condensar como

$$\delta W^{\mathsf{int}}(\boldsymbol{\eta}) + \delta W^{\mathsf{ext}}(\boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_{\mathsf{comp}}$$

- Como se ha visto, la forma fuerte implica la débil (PTV); la inversa se puede probar también, es decir el PTV es condición necesaria y suficiente para el equilibrio.

Índice

Discretización – Interpolación de desplazamientos

- Consideremos un elemento $\mathcal{B}_{(e)} \subset \mathcal{B}$, con nodos $a = 1 \dots n$. Las funciones de forma isoparamétricas interpolan la geometría y los desplazamientos. En una malla Lagrangiana se expresan en función de coordenadas materiales $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X} = \sum_{a=1}^{n} N_a(\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}_a \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \sum_{a=1}^{n} N_a(\boldsymbol{X})\boldsymbol{x}_a$$

- Considerando el campo de desplazamientos, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \sum_{a=1}^{n} N_a(\boldsymbol{X})\boldsymbol{u}_a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{u} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{u}^{(e)}}$$

  con $\mathbf{N}$: operador matricial, $\mathbf{u}^{(e)}$: vector desplaz. del elemento

- Galerkin: igual interpolación para los desplazamientos virtuales

$$\boldsymbol{\eta} = \sum_{a=1}^{n} N_a(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\eta}_a \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(e)}}$$

Discretización – Galerkin (I)

- Con estos resultados podemos discretizar el trabajo virtual de las tensiones, en la configuración actual $\mathcal{B}$. Se calcula como suma sobre todos los nodos $a = 1, \ldots n$.

$$\delta W^{\text{int}} = -\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}{:}\boldsymbol{\varepsilon}^{\eta}\,\mathrm{d}V = -\int_{\mathcal{B}} \Big(\sum_{a=1}^{n} \sigma_{pq} \frac{1}{2} (\eta_{ap} N_{a,q} + \eta_{aq} N_{a,p} \Big)\,\mathrm{d}V$$

- Lo cual permite definir unos operadores matriciales de interpolación de deformaciones $\mathbf{B}_a$, que se obtienen a partir de los gradientes de las funciones de forma,

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_a {\cdot} \boldsymbol{u}_a\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\eta} = \boldsymbol{\eta}_a {\cdot} \mathbf{B}_a^{\mathsf{T}}}$$

- Los desplazamientos virtuales nodales $\boldsymbol{\eta}_a$ se pueden sacar de la integral, resultando para cada elemento e:

$$\delta W_{(e)}^{\text{int}} = -\sum_{a=1}^{n} \left(\boldsymbol{\eta}_a {\cdot} \int_{\mathcal{B}_{(e)}} \mathbf{B}_a^{\mathsf{T}} {\cdot} \boldsymbol{\sigma}^{(e)}\,\mathrm{d}V \right)$$

Discretización – Galerkin (II)

- Para entender mejor la expresión, si se restringe el cálculo a un nodo determinado a dentro del elemento (e),

$$\delta W^{\text{int}}_{(e)a} = -\boldsymbol{\eta}_a \cdot \int_{\mathcal{B}_{(e)}} \mathbf{B}_a^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \, \mathrm{d}V = -\boldsymbol{\eta}_a \cdot \boldsymbol{f}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}^{(e)})$$

- lo que permite definir unos vectores de fuerzas internas para cada nodo,

$$\boxed{\boldsymbol{f}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}^{(e)}) = \int_{\mathcal{B}_{(e)}} \mathbf{B}_a^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(e)} \, \mathrm{d}V}$$

- En la expresión anterior, la relación $\mathbf{u}^{(e)}) \to \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{(e)})$ entre desplazamientos y tensiones será en general no lineal, debido a las grandes deformaciones y a la respuesta no lineal del material

Discretización – Galerkin (III)

- Ensamblando, dan lugar al vector de fuerzas internas $\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u})$, función de los gdl globales $\mathbf{u}$, con $N_{\text{dim}} \times n = N$ grados de libertad.

$$\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathsf{A}_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \left[\boldsymbol{f}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}^{(e)}) \right] \tag{11}$$

- Análogamente, se ensamblan las fuerzas externas:

$$\mathbf{F}_a^{\text{ext}} = \mathsf{A}_{e=1}^{N_{\text{ele}}} \left[\boldsymbol{f}_a^{\text{ext}} \right] \tag{12}$$

- Considerando lo anterior, la expresión discretizada para el PTV es

$$\delta W = \delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{ext}} = \boldsymbol{\eta}_a \cdot \left(-\mathbf{F}_a^{\text{int}} + \mathbf{F}_a^{\text{ext}} \right) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_a$$

- Al ser arbitrarios los valores $\boldsymbol{\eta}_a$, conduce al siguiente sistema no lineal de ecuaciones algebraicas

$$\boxed{\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_a^{\text{ext}}, \; a = 1 \ldots n\,.}$$

Discretización – Galerkin (IV)

Caso no lineal o lineal

- En el caso general (grandes deformaciones, material no lineal. . .), las relaciones $\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u},\mathbf{q})$ son no lineales y dan lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales

$$\boxed{\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u},\mathbf{q}) = \mathbf{F}_a^{\text{ext}},\ a = 1 \dots n\,.}$$

- En sistemas con elasticidad lineal, pequeños desplazamientos y deformaciones la dependencia de $\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u})$ es lineal, y el sistema resultante es un sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_{ab}\cdot\boldsymbol{u}_b\,; \qquad \boxed{\mathbf{K}_{ab}\cdot\boldsymbol{u}_b = \mathbf{F}_a^{\text{ext}}\,.}$$

Discretización – Galerkin (V)

- En el desarrollo anterior por simplicidad se ha considerado que las cargas externas (distribuidas como $\boldsymbol{q}_0$ o de superficie $\overline{\boldsymbol{T}}$) son constantes, es decir no dependen de la configuración ni del movimiento del cuerpo. Por tanto el término del lado derecho $\mathbf{F}_a^{\text{ext}}$ es constante, representando una carga conservativa.
- Por el contrario. el término de la izquierda $\mathbf{F}_a^{\text{int}}(\mathbf{u}, \mathbf{q})$ sí depende de la configuración del cuerpo, lo que puede ser representado para el problema discreto mediante los desplazamientos nodales $\mathbf{u} = \{\boldsymbol{u}_b, b = 1, \ldots n\}$, así como posiblemente otras variables internas $\mathbf{q}$. Esta dependencia de $(\mathbf{u}, \mathbf{q})$ es no lineal en un caso general.
- También puede darse el caso de cargas externas no conservativas $\mathbf{F}_a^{\text{ext}}(\mathbf{u})$ o fuerzas seguidoras.

Ecuaciones discretas no lineales (I)

- El sistema global de ecuaciones es entonces

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \tag{13}$$

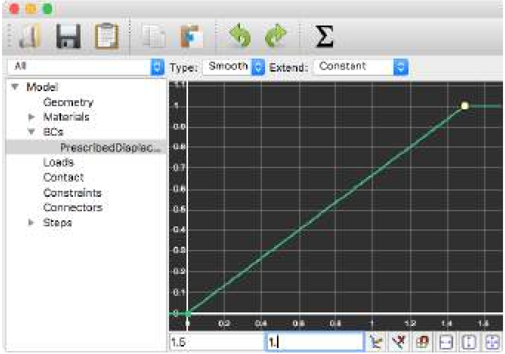
  donde $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ se denomina residuo, que debería anularse para la solución buscada (o ser suficientemente pequeño).

- En la práctica, para evitar nolinealidades demasiado severas y también permitir una adecuada monitorización del camino de la solución, las cargas se aplican gradualmente a través de un parámetro escalar λ:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \tag{14}$$

Ecuaciones discretas no lineales (II)

- El parámetro λ puede interpretarse como un pseudo-tiempo y sirve para realizar un cálculo cuasi-estático. Normalmente λ varía entre 0 y 1 (100 % de la carga en $\lambda = 1$), aunque puede modificarse a conveniencia.
- En **FEBio** se establece así por defecto aunque puede ajustarse mediante la definición de curvas que definan una aplicación gradual para cada acción.



Resumen del Método de Elementos Finitos

Ingredientes del MEF

1. Formulación fuerte
   - Ecuaciones diferenciales (EDP) $\forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{B} \;\rightarrow\; \infty$ gdl
   - Condiciones de Contorno (C.C.) Naturales y Esenciales
2. Formulación débil (PTV)
   - Ponderación por campo virtual arbitrario $\boldsymbol{\eta}$ (despl. virtuales)
   - Integrales extendidas a $\int_{\mathcal{B}}$ + Integración por partes
   - C.C. esenciales
3. Aproximación
   - Discretización: elementos $\mathcal{B}_{(e)} \subset \mathcal{B}$, nodos $a \rightarrow N$ gdl
   - Funciones de forma: $N_a(\boldsymbol{X}) \;\rightarrow\; \boldsymbol{u} = \mathbf{N}\cdot\mathbf{u}^{(e)},\; \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}^{(e)}$
   - Integración por elementos: $\boldsymbol{f}_a^{\mathsf{int}}(\boldsymbol{u}_{(e)}) = \int_{\mathcal{B}_{(e)}} \mathbf{B}_a^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{(e)}\,\mathrm{d}V$
4. Formulación matricial
   - Ensamblaje de matrices elemento $\rightarrow$ global; Ecs. de equilibrio
   - Resolución de Ecuaciones Algebraicas no lineales

Índice

Resolución no lineal – Procedimientos

- Para la resolución de las ecuaciones algebraicas no lineales que resultan de los EF se requieren métodos iterativos, no se puede realizar en un paso único.
- Algunos de los más comunes son:
  - Métodos de punto fijo
  - Métodos de linealización o de Newton (también llamado *Newton-Raphson*)
  - Métodos Cuasi-Newton (Broyden, BFGS,...)
  - Métodos de relajación dinámica
- Normalmente es necesario hacer dos niveles de incrementos / iteraciones
  1. aplicar de forma incremental la carga o acción exterior, no de forma completa en un paso
  2. resolver iterativamente para cada incremento de carga
- Comúnmente se requieren múltiples soluciones de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales mediante "**solvers**" (Jacobi, Gauss-Seidel, Gradiente conjugado...).

Resolución no lineal (1)

- En un caso no lineal general el método más robusto la solución iterativa por linealización o método de Newton.
- Realizando la derivada direccional de $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda)$, se obtiene la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T$:

$$\mathrm{D}\mathbf{R}(\mathbf{u}_k, \bar{\lambda})[\Delta \boldsymbol{u}] = \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k, \bar{\lambda}) \cdot \Delta \boldsymbol{u} \tag{15}$$

  donde la tangente se evalúa en el nivel de cargas $\lambda = \bar{\lambda}$, y un valor dado $\mathbf{u}_k$ en la iteración k del proceso.
- El proceso iterativo de Newton supone que se parte de un punto adecuado $\mathbf{u}_k$ en el cual el residuo no es nulo $(\mathbf{R}(\mathbf{u}_k) \neq \mathbf{0})$ pero está suficientemente cercano a la solución. Se aproxima la curva por su tangente (en el espacio $2N$-dimensional):

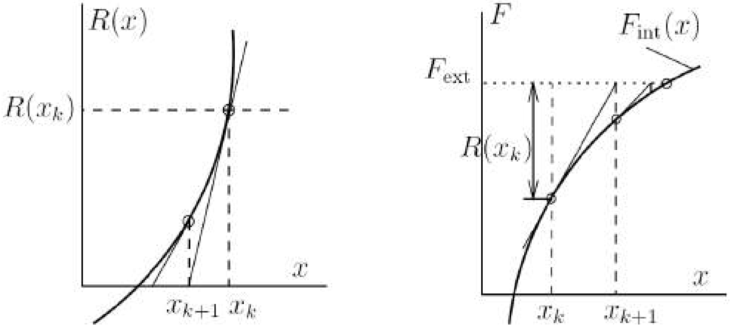
$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{16}$$

Resolución no lineal (2)

- Resolviendo para $\Delta\mathbf{u}_{k+1}$ el sistema de ecuaciones lineales, conduce al siguiente valor iterativo

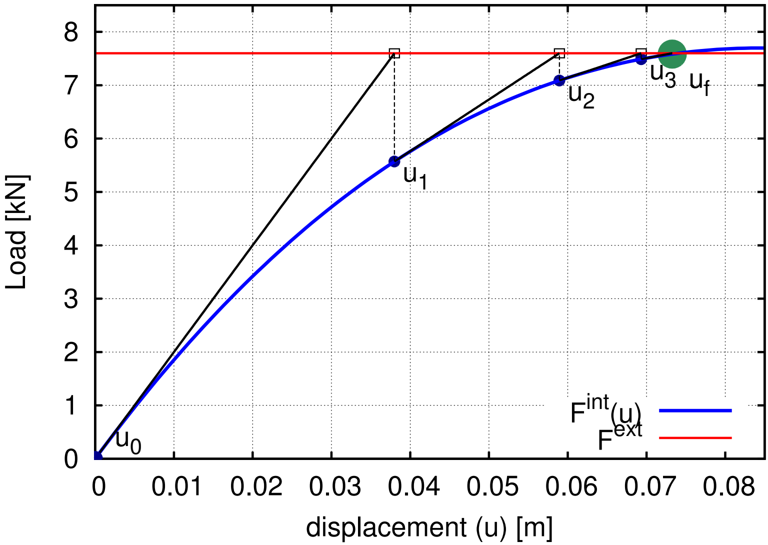
$$\Delta\mathbf{u}_{k+1} = -\mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}_k) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{u}_{k+1} \qquad (17)$$

- Abajo se muestra una interpretación geométrica del proceso para un caso con un grado de libertad (denominado aquí x)



Método de Newton – secuencia 1 gdl

Ecuación no lineal: $R(u) = F^{\text{int}}(u) - F^{ext} = 0$



Resolución no lineal (4) – Convergencia

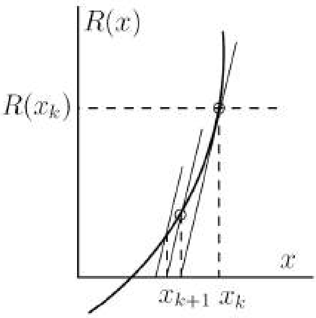
- Las iteraciones se detienen cuando el residuo es suficientemente pequeño.
- Esto se define requiriendo que una norma adecuada del residuo $\mathbf{R}(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\lambda})$ está por debajo de una tolerancia prefijada de la solución

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{u}_{k+1}, \bar{\lambda})\| \leq \epsilon R_0$$

- Se puede demostrar que el método de Newton tiene convergencia cuadrática (es decir, el residuo se reduce como la raíz cuadrada para cada iteración)

Newton modificado

- El método de Newton requiere la evaluación de la tangente $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$ en cada iteración. En ocasiones puede ser preferible no recalcular la tangente, o como mucho recalcularla cada $n > 1$ iteraciones, esto es el denominado método de Newton modificado

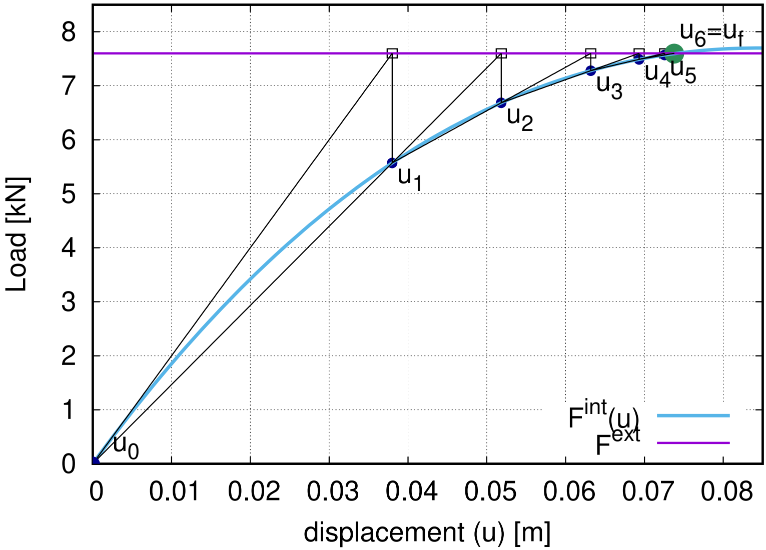


- La convergencia es lineal, más lenta que para Newton

Cuasi-Newton

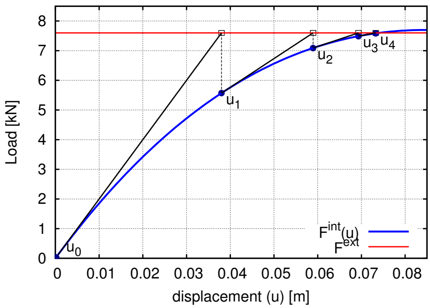
- Una alternativa a menudo óptima son los métodos Cuasi-Newton, que pueden interpretarse geométricamente como la linealización a partir de la secante, en lugar de la tangente.
- El método Cuasi-Newton más ventajoso con carácter general es el BFGS (*Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno*).
- Se basa en actualizar, para cada iteración, la matriz de rigidez inversa, obteniendo así una aproximación a la matriz exacta.
- El algoritmo se basa en calcular una secuencia de vectores, para cada iteración. Resulta muy ventajoso para problemas con muchos gdl. es el que se emplea en FEBiO por defecto.
- La convergencia del BFGS es superlineal (más que lineal pero menos que cuadrática).

Ecuación no lineal: $R(u) = F^{\text{int}}(u) - F^{ext} = 0$



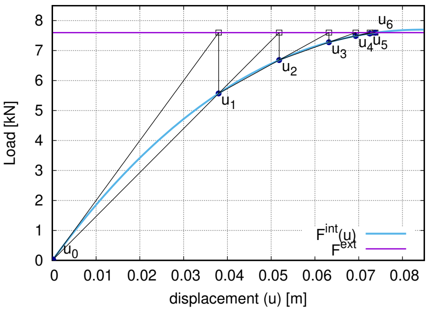
Comparación Newton / Cuasi-Newton

Newton



Convergencia en 4 iteraciones

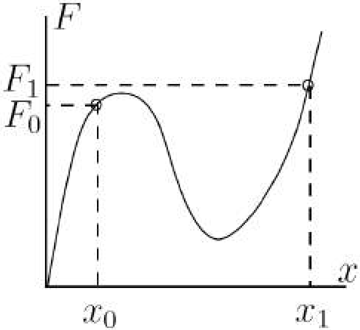
Cuasi-Newton



Convergencia en 6 iteraciones

Control de desplazamientos / Continuación

- *Motivación*: problemas con inestabilidades de la carga (p.ej. snap-through)
- Para F_1 se obtiene una inestabilidad, que puede ser resuelta por control de desplazamientos



$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fp} \\ \mathbf{K}_{fp} & \mathbf{K}_{pp} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{u}_f \\ \Delta\mathbf{u}_p \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_p \end{Bmatrix}$$

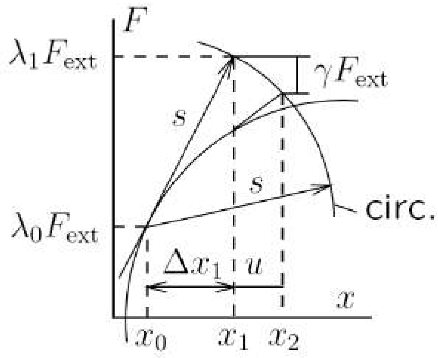
- $\mathbf{u}_f$ son desplazamientos libres
- $\mathbf{u}_p$ son desplazamientos prescritos

- Considerando que $\Delta\mathbf{u}_p$ son conocidos,

$$\mathbf{K}_{ff}\Delta\mathbf{u}_f = -(\mathbf{R}_f + \mathbf{K}_{fp}\Delta\mathbf{u}_p)\,; \qquad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta\mathbf{u}_f$$

- Motivación: para caminos de carga altamente inestables, controlar el incremento de carga definiendo la longitud de arco según la curva del camino de equilibrio. este incremento es una nueva incógnita que debe satisfacer una cierta restricción,

$$\mathbf{R}(\mathbf{u},\lambda) = \mathbf{F}^{\text{int}} - \lambda \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \tag{18}$$



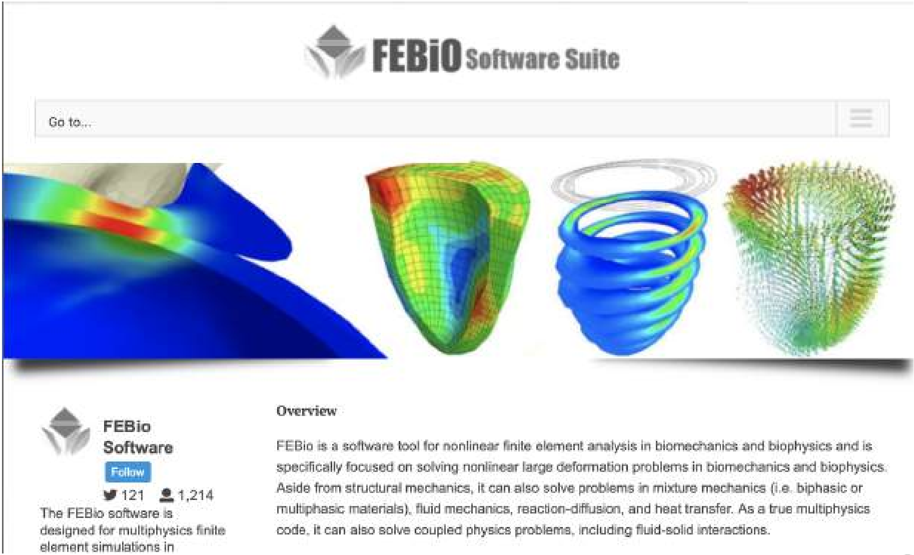
Desarrollamos el denominado método esférico

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}} = \Delta\lambda \cdot \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

$$\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$$

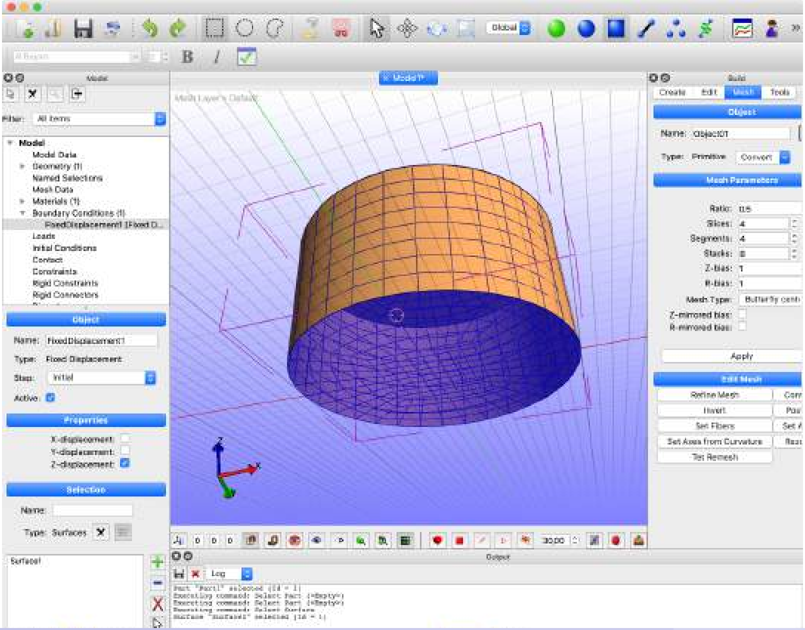
Índice

Software Libre: FEBio



https://febio.org/

FEBio: definición modelo



Modelos numéricos para dinámica de fluidos (2)

Tipo de modelos para CFD

- **Diferencias Finitas (DF)**: (más sencillo)
  - Mallas estructuradas,
  - No son prácticos para geometrías complejas
- **Volúmenes finitos (VF)**: (más común y potente)
  - Forma integral de las ecuaciones
  - Programas de cálculo: FLUENT, StarCCM, OpenFOAM...
- **Elementos finitos (EF)**: (en FEBio, SimVascular)
  - Funciones de peso y de forma: operadores $\mathbf{N}, \mathbf{B}$
  - Requiere estabilización, ¡Galerkin no funciona!
    - Estabilización SUPG:
      Hughes et al, F. Calvo (FEAP)...
    - Método α generalizado:
      Hulbert et al, FEBio

Modelos numéricos para fluidos

- Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)
- Sólidos: se suele usar una descripción Lagrangiana, siguiendo las magnitudes de cada partícula. La malla se deforma con el sólido.
- Fluidos: se suele usar una descripción Euleriana, siguiendo las magnitudes de cada punto en el espacio. La malla es fija, el fluido fluye a través de la misma.
- La descripción Euleriana para los fluidos evita los problemas de distorsión de la malla, pero hace necesario considerar términos convectivos debidos a la velocidad del fluido.
- La aproximación numérica de los términos convectivos no puede ser la simétrica de Galerkin. Se producen importantes inestabilidades, que requieren técnicas especiales de diferenciación numérica (diferenciación "upwind")

Modelos numéricos – Sólidos y fluidos

Modelos numéricos para sólidos (tejidos)

- Mallas Lagrangianas (siguen al material)
- Mayor dificultad y complejidad para modelos constitutivos de los materiales
- Menor dificultad para estabilidad numérica

Modelos numéricos para fluidos

- Mallas Eulerianas (fijas en el espacio, las partículas fluyen a través de ellas)
- Menor dificultad y complejidad para modelos constitutivos del fluido
- Mayor dificultad para estabilidad numérica (términos convectivos, incompresibilidad)

SW (libre) para sólidos y fluidos – Materiales (1)

Materiales fluidos – FEBio User Manual

Materiales sólidos (elásticos) – FEBio User Manual

Materiales sólidos (fibras, viscoelásticos) – FEBio User Manual

Materiales sólidos (daño, plasticidad) – FEBio User Manual

Modelos numéricos fluidos – Volúmenes Finitos

Para evaluar las integrales

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i \; \mathrm{d}V + \int_S \rho u_i \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; \mathrm{d}S = \int_S \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n} \; \mathrm{d}S + \int_V \rho b_i \; \mathrm{d}V \; ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \; \mathrm{d}V + \int_S \rho \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \; \mathrm{d}S = 0 \; ,$$

se emplean puntos de integración de volumen y de superficies o caras:

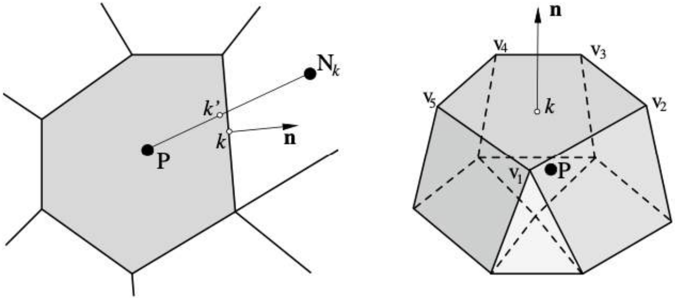
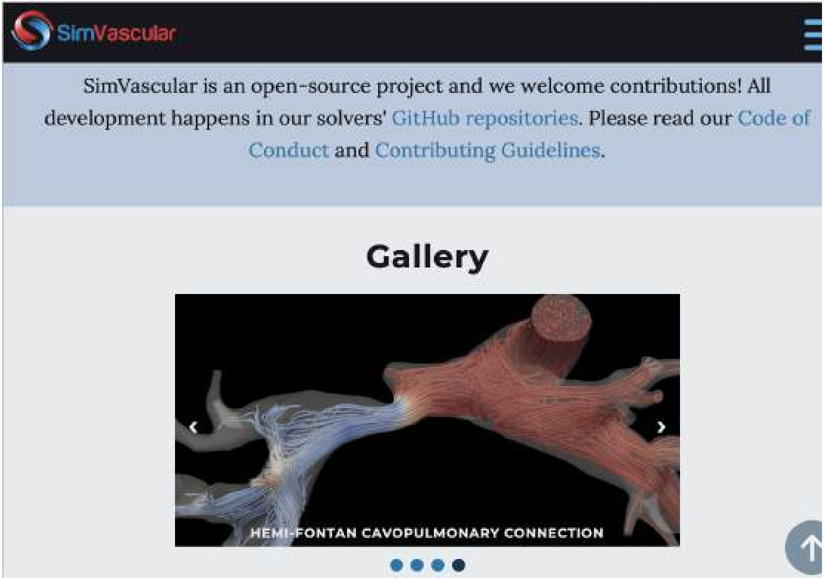


Fig. 9.18 General 2D and 3D control volume and the notation used

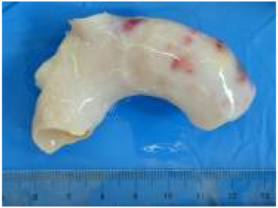
Software Libre: SimVascular



https://simvascular.github.io/

Índice

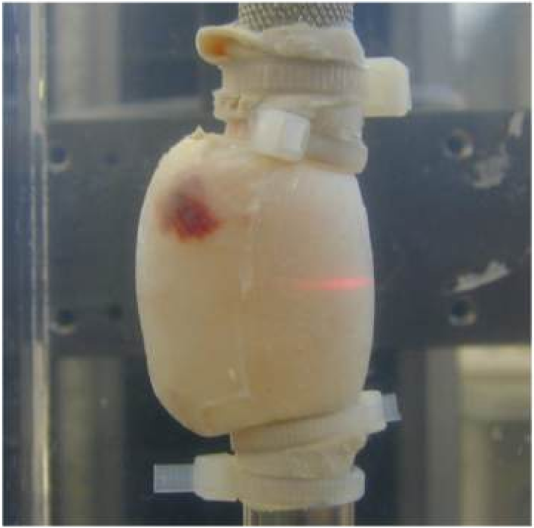
Doblado y presurizado de aorta humana
Descripción del problema

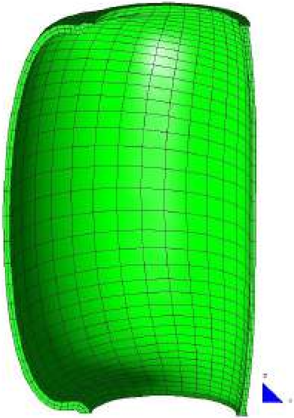


Montaje del vaso

Probeta montada antes de inflar

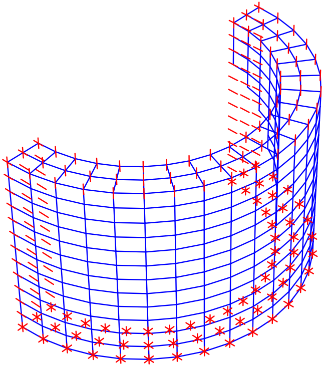
Doblado y presurizado de aorta humana

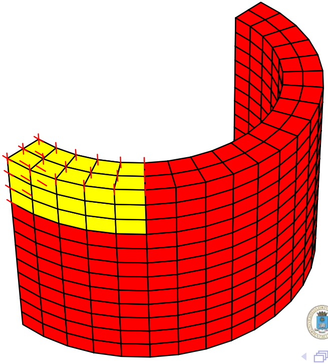




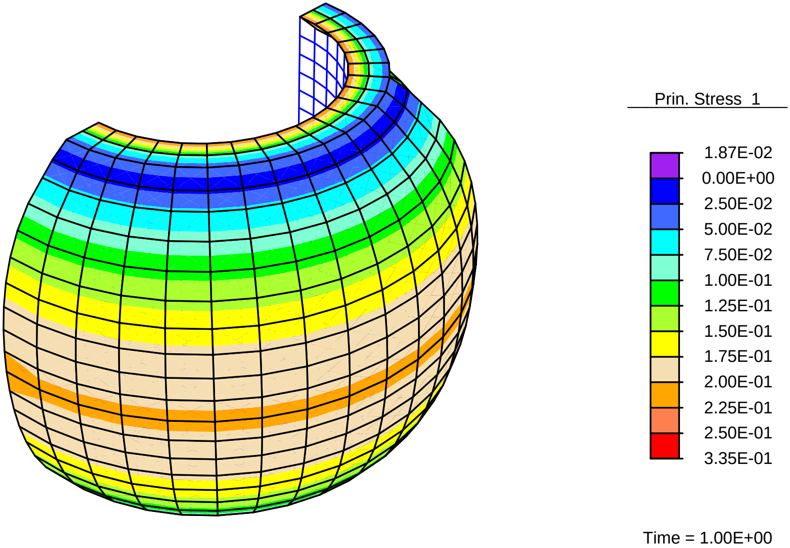
Ejemplo: presión interior en aorta con ateroma

- $R_i = 5{,}6$ mm, $e = 1{,}6$ mm, $H = 17$ mm, $a = 46{,}97$ kPa, $b = 1{,}15$.
- Presión interior $p = 200$ mmHg (fuerza seguidora)
- Material hiperelástico $W = \frac{1}{2} K \ln^2 J + \frac{a}{b} \left[e^{\frac{b}{2}(I_1 - 3)} - 1 \right]$
- Grandes deformaciones y desplazamientos. no linealidad geométrica y material.
- Ateroma: tejido fibroso, rigidez$\times 6$



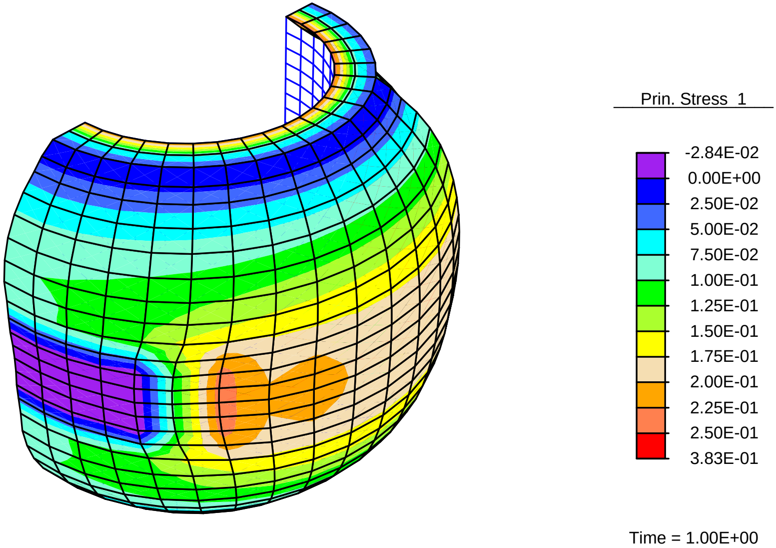


Ejemplo: presión interior en aorta sin ateroma
Secuencia de mallas deformadas



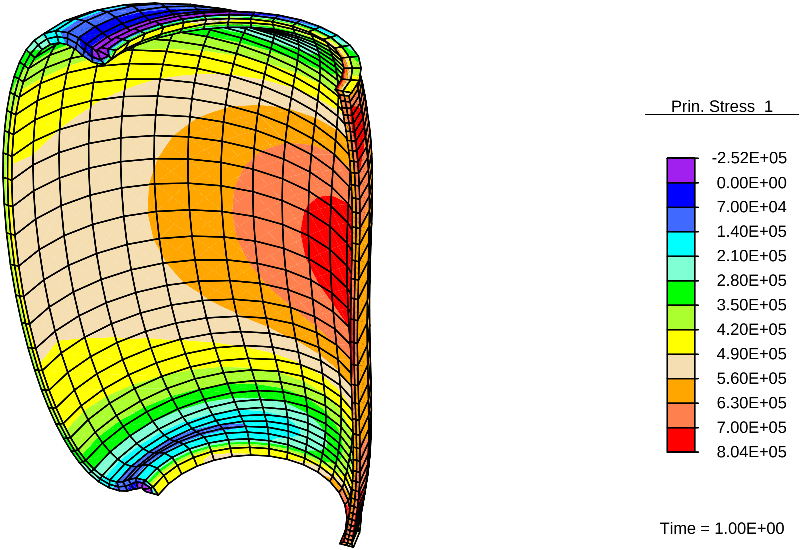
Ejemplo: presión interior en aorta con ateroma

Secuencia de mallas deformadas

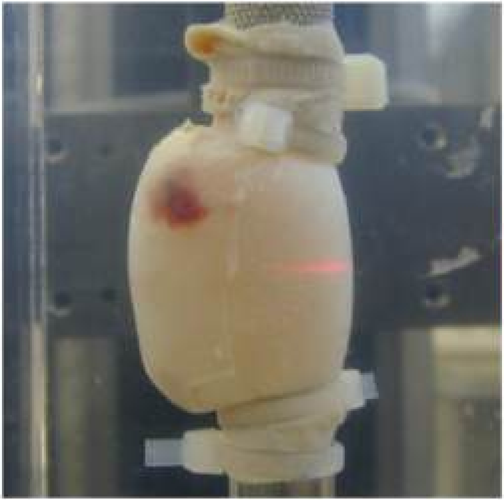


Simulación del doblado y presurizado de una aorta

Secuencia de mallas deformadas

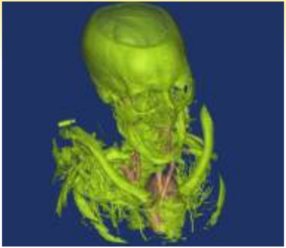


Simulación del doblado y presurizado de una aorta



Cayado Aórtico

Geometría del cayado aórtico y simulación flujo

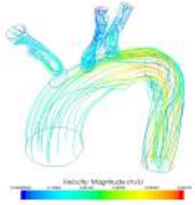


SEGMENTACIÓN DE TOMOGRAFÍAS COMPUTERIZADAS (CT'S)

MUESTRAS DE TEJIDO Y DIGITALIZACIÓN (ESCANEADO 3D)

AJUSTE DE CAD Y MALLADO DE ELEMENTOS FINITOS.

MALLA DE VOLÚMENES FINITOS DE AORTA



LÍNEAS DE CORRIENTE EN UN INSTANTE DE LA SIMULACIÓN

Estudio Aneurisma Aorta ascendente

SEGMENTACIÓN

- ITK-Snap
- Imágenes
  - Sana: Repositorio 3D-Slicer
  - Aneurismática: Hospital Universitario Puerta de Hierro

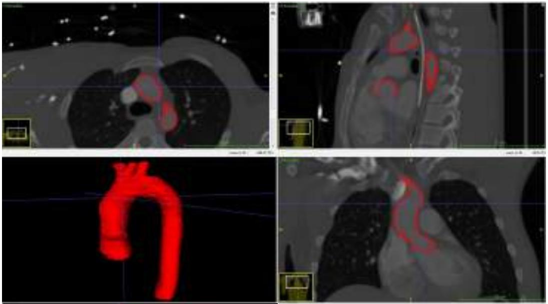
Poca resolución y cortes con mucha distancia entre sí

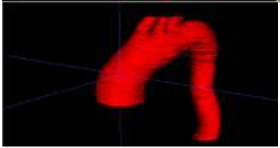
↓

- Segmentación paredes aorta de forma manual → corte a corte
- Reconstrucción 3D de objeto STL → puntos unidos topológicamente formando triángulos

↓

Obtenemos volumen entre caras interna y externa pared aórtica





Aneurismática: geometría compleja → no podemos segmentar hasta el anillo aórtico

5

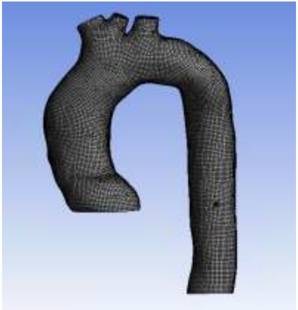
TFG Marta Rodríguez Navas, 2022

PARCHES NURBS Y MALLADO: AORTA SANA

- Entornos SpaceClaim y Mechanical de Ansys
- Parches NURBS → permiten generar mallas más finas o gruesas de forma automática

Malla:

- **Hexaédrica**
- **Estructurada:** líneas circunferenciales y meridionales



PARCHES NURBS Y MALLADO: AORTA ANEURISMÁTICA

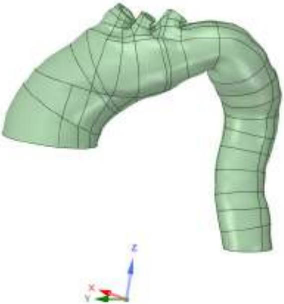
Limitaciones de tiempo

↓

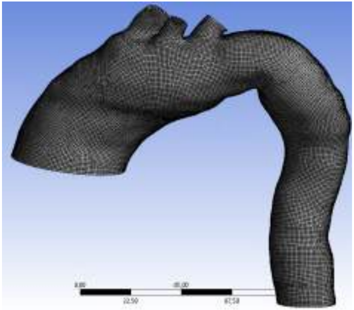
Parches NURBS no completamente meridionales o circunferenciales

↓

Defectos malla



→

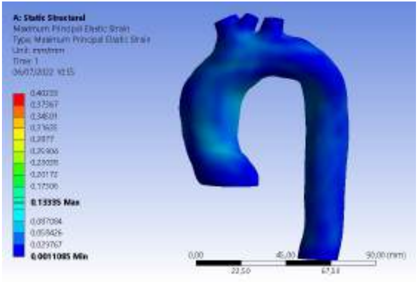


8

TFG Marta Rodríguez Navas, 2022

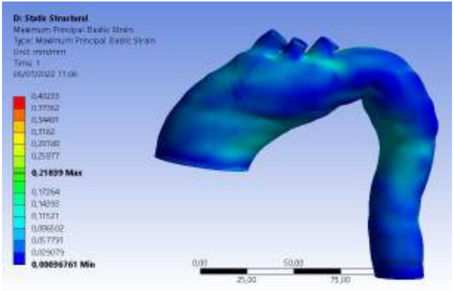
RESULTADOS: MODELO NEOHOOKEANO (c=120 kPa)

Aorta sana



$\mathrm{RR} = 0{,}08$

Aorta aneurismática

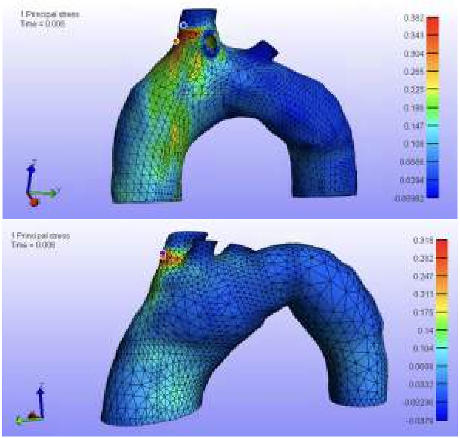


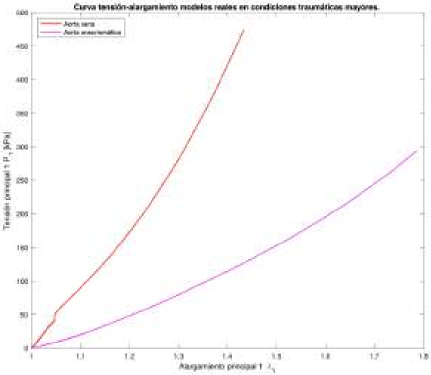
$\mathrm{RR} = 0{,}15$

12

TFG Marta Rodríguez Navas, 2022

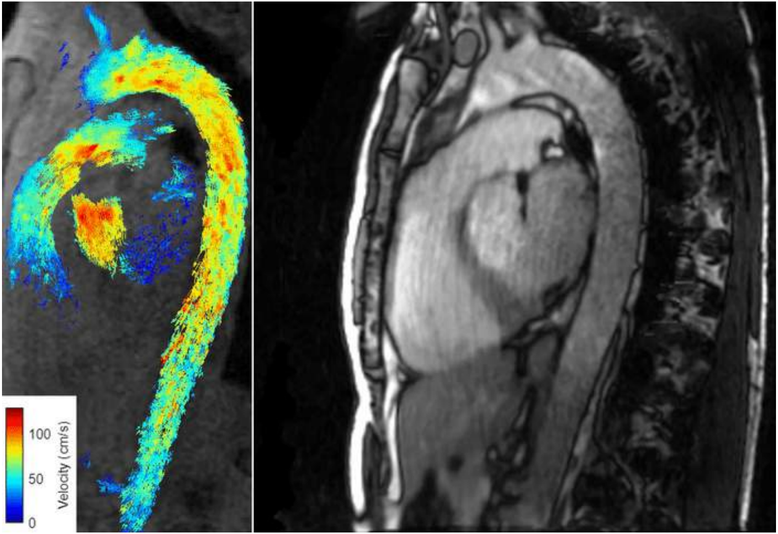
Arco aórtico - Material con fibras HOG





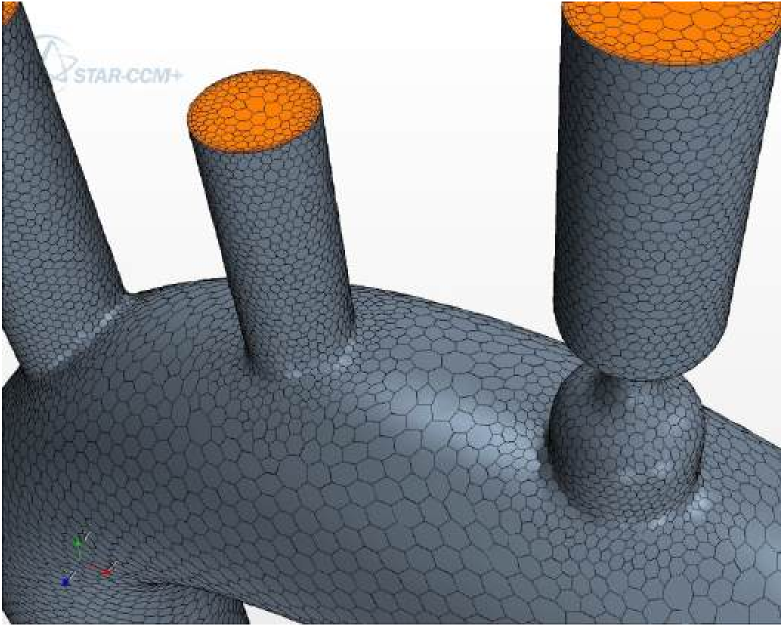
TFM Laura García, 2023.

Ejemplos de aplicación: Aorta – Imágenes médicas

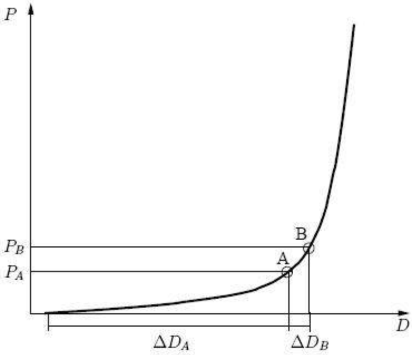


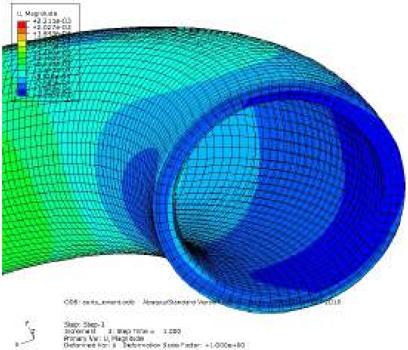
Aortic 3D CINE bSSFP and 4D flow applications (1 mm isotropic resolution), Eric Schrauben etal 2023

Ejemplos de aplicación: Aorta – Mallado fluido VF

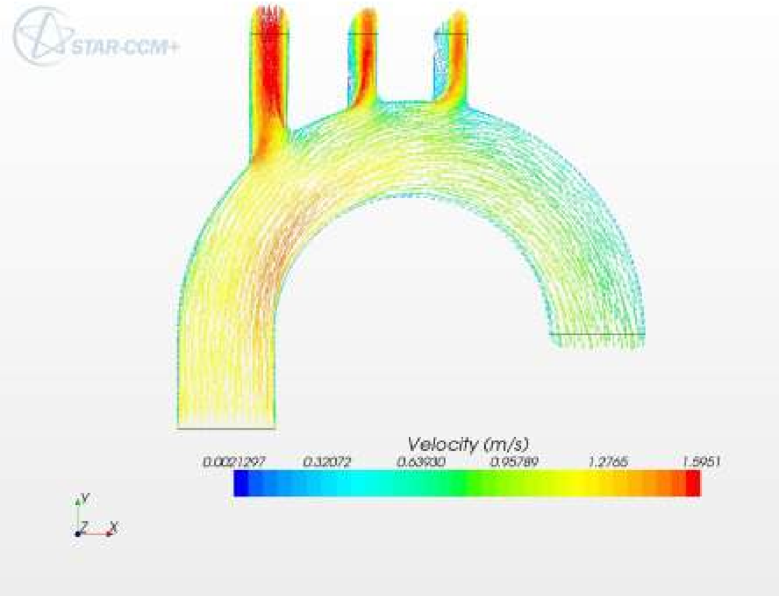


Aorta – Tensiones iniciales en pared arterial

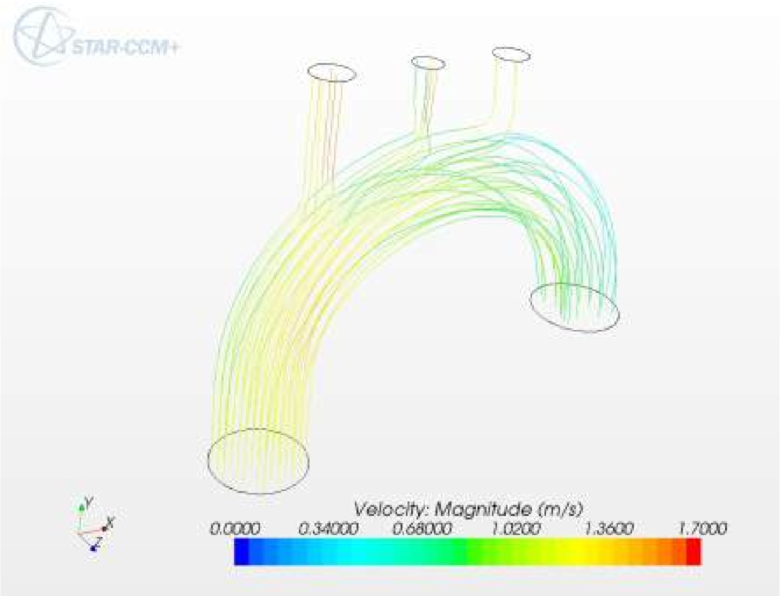




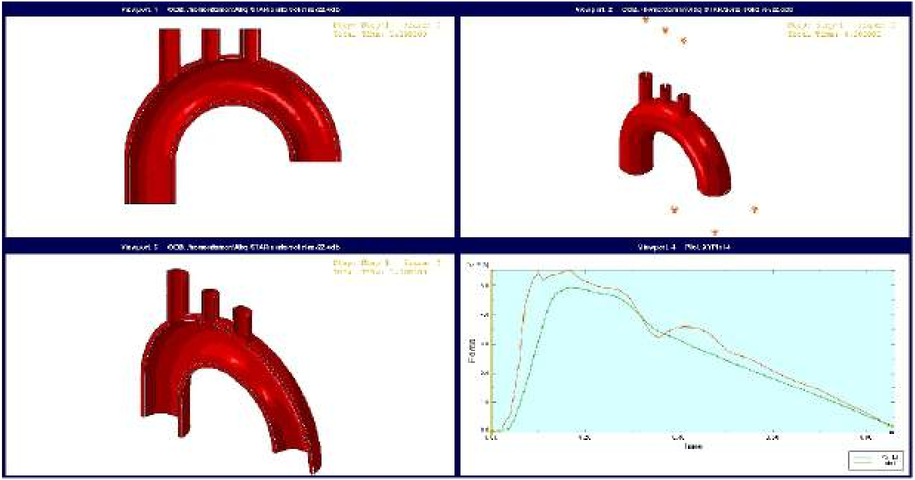
Aorta – caso sano



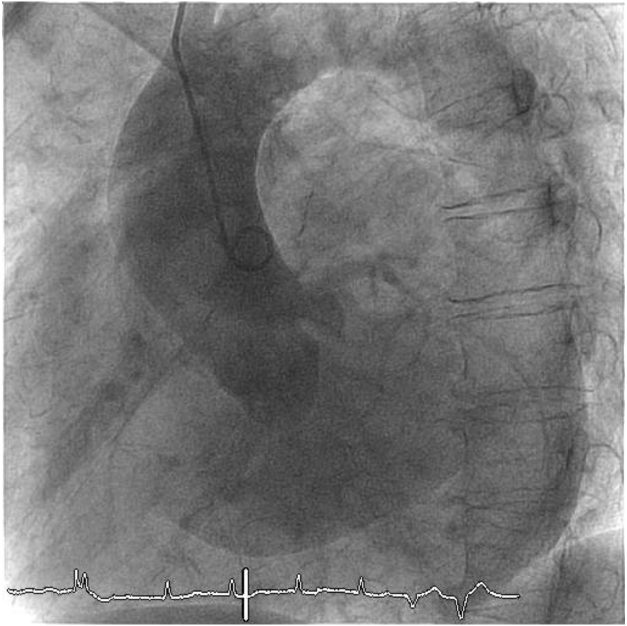
Aorta – caso sano



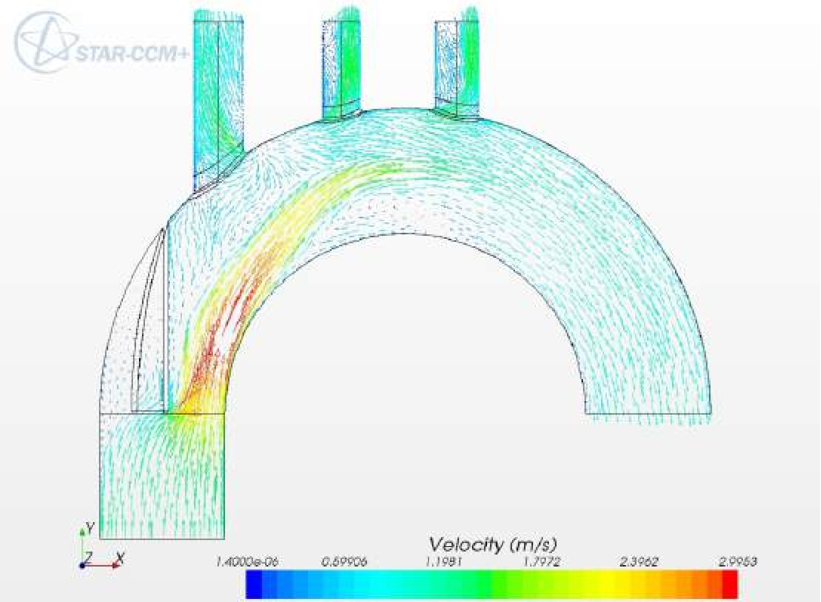
Aorta – caso sano



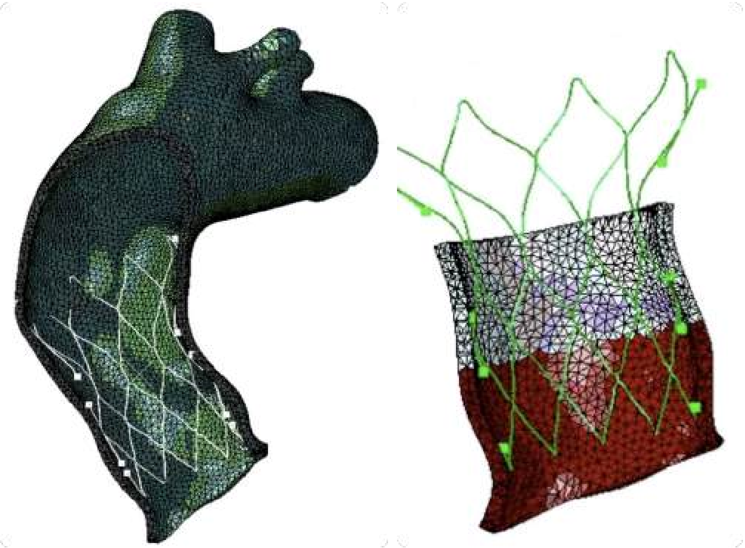
Aorta – estenosis en válvula



Aorta – disección en rama ascendente



TAVI – Transcatheter Aortic Valve Implantation



TFM Candela Arrieta, 2023.

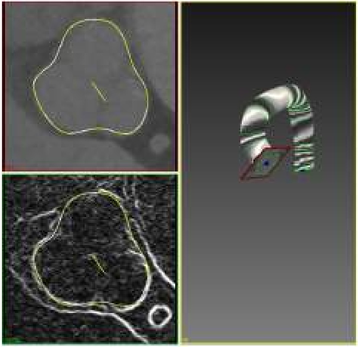
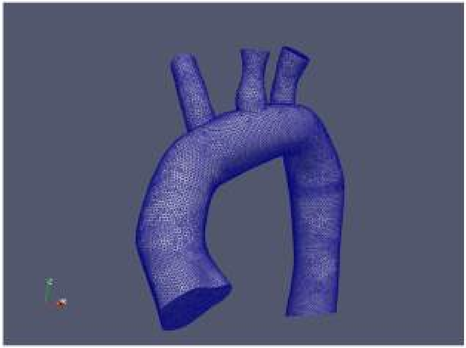
DAVI – optimización del flujo

- El fallo ventricular es una patología con repercusiones muy graves sobre la salud y la vida.
- La solución es el trasplante de corazón, pero algunas circunstancias como la escasez de corazones o la debilidad del paciente han hecho necesario el desarrollo de dispositivos de asistencia ventricular izquierda (DAVI) como solución alternativa al trasplante.
- Un ejemplo de DAVI es el HeartMate 3 desarrollado por Abbott.

TFG Angélica Casero, 2024.

DAVI – optimización del flujo

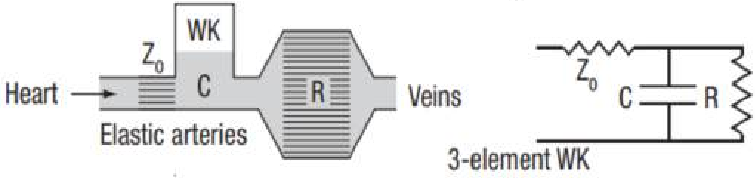
- **SimVascular**: Programa de código abierto para segmentación, mallado y simulación en hemodinámica.
- **Segmentación**: Basada en PATHS y SEGMENTATIONS.
- **Malla**: Elementos triangulares en la superficie, tetraedros en el volumen.

TFG Angélica Casero, 2024.

DAVI – optimización del flujo

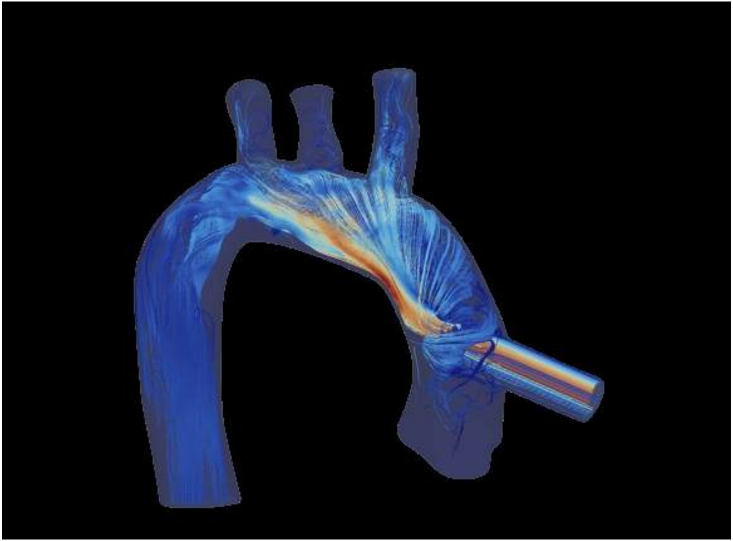
- Permite conectar el modelo 3D con el resto del sistema circulatorio mediante un modelo de 0D.
- Caracteriza la interacción del sistema vascular con una analogía similar a un sistema eléctrico.
  1. Capacidad: Determinada por la elasticidad de la pared de la aorta y los vasos que salen de esta.
  2. Resistencia: Oposición que ejercen los vasos al paso de la sangre.
- Se establece este modelo como condiciones de contorno en las salidas que conectan el modelo 3D con el resto del sistema circulatorio.



TFG Angélica Casero, 2024.

DAVI – optimización del flujo

Líneas de corriente con cánula

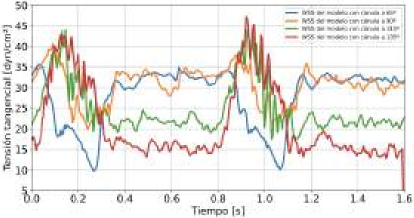


TFG Angélica Casero, 2024.

DAVI – optimización del flujo

Situación actual del dispositivo.

- Presión
  1. Valores de presión en rango fisiológico.
  2. Valores de gradiente de gradiente positivos en sístole en orientaciones 90º y º135. Excesivamente alto en 135º.
- Tensión tangencial
  1. Valores más cercanos a los valores reales.
  2. Resultados entre orientaciones muy diferentes en la aorta ascedente.



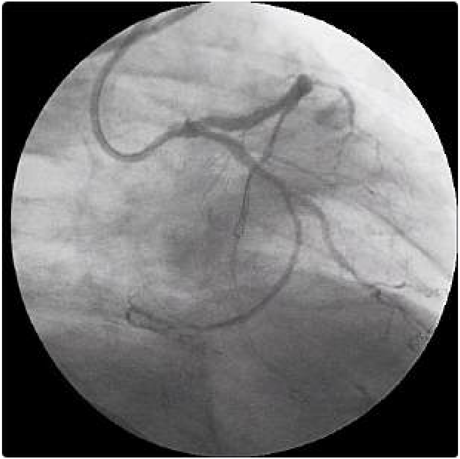
- Velocidad: Valores coherentes con la tesis de Damon Afkari.

TFG Angélica Casero, 2024.

Índice

Coronarias – Angioplastia compleja en bifurcación

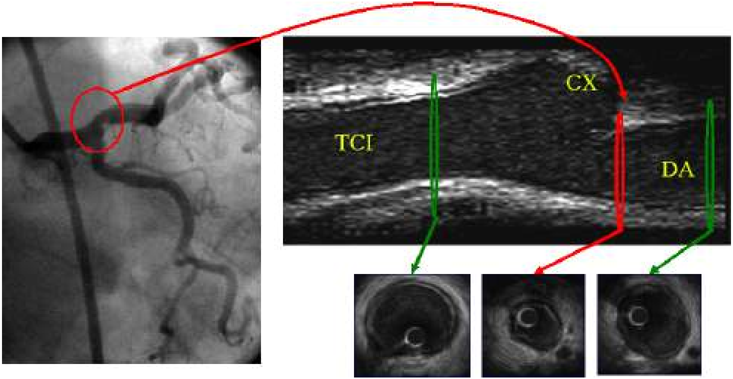
Antes de la intervención (estenosis)



Después de la intervención (stents colocados)

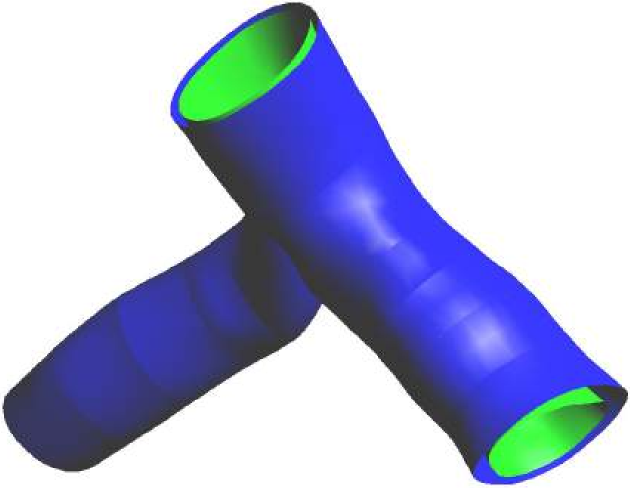
Coronarias – Obtención de geometría in vivo

- Angiografía biplano reconstruye la trayectoria del catéter
- Contornos internos y externos de la pared por segmentación de imágenes IVUS orientadas
- Slager et al [Circulation 2000], Wentzel et al [J. Biom. 2003]
- Ejemplo: *remodelación negativa afectando el flujo en la bifurcación*

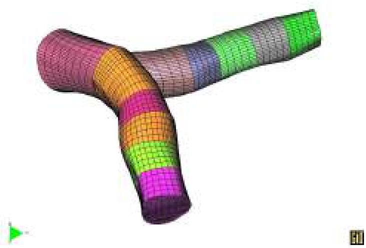


Ejemplos de aplicación: Coronarias – Reconstrucción 3D: luz y pared

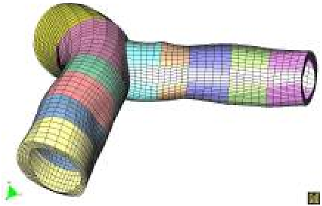
Bifurcation LAD – CX



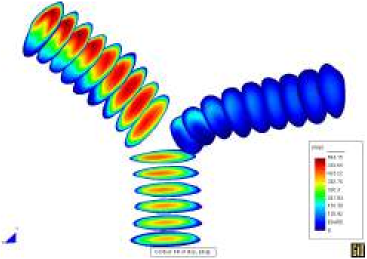
Coronarias – modelo de bifurcación, coronaria izq.



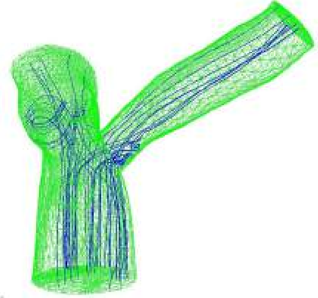
fluido: 16878 elementos



sólido: 16425 elementos



Velocidad



Líneas de corriente

Coronarias – Tensiones sobre el endotelio

Tensión tangencial

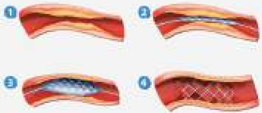
Tensión total (≈ normal)

Estenosis en arterias coronarias

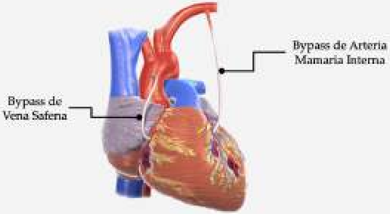
Métodos de intervención habituales

- Para estenosis de poca gravedad: tratamientos farmacológicos
- Para estenosis severas: intervención quirúrgica
  - Intervención Coronaria Percutánea (ICP): angioplastia percutánea con balón, con o sin implantación de stent
  - Cirugía de Revascularización Miocárdica (CRM): bypass coronario con injertos de vena o arteria del paciente
- En ocasiones se realiza intervención quirúrgica cuando no es estrictamente necesario → Índices fisiológicos para determinar la gravedad de la lesión

- Intervención Coronaria Percutánea (ICP):



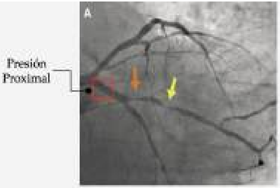
- Cirugía de Revascularización Miocárdica (CRM):



TFG Natalia Bru, 2024.

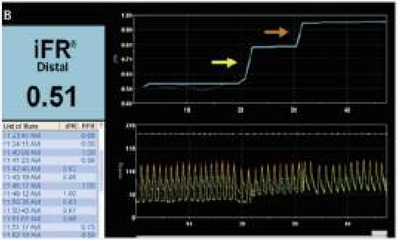
<u>Índices fisiológicos para el diagnóstico</u>

- Método de diagnóstico de estenosis habitual: angiografía coronaria de contraste o TAC coronario
- Limitación a la hora de estimar la gravedad de la lesión e invasividad
- Índices fisiológicos: determinar el impacto hemodinámico de las lesiones coronarias



$$\boxed{FFR = \frac{presión\ distal}{presión\ aórtica}\ (En\ hiperhemia)}$$

$$\boxed{iFR = \frac{presión\ distal}{presión\ aórtica}\ (En\ periodo\ libre\ de\ ondas)}$$



- Sensor de presión en el extremo de un catéter
- Índice fisiológico muy novedoso: QFR (*Quantitive Flow Ratio*)
- Lesión coronaria grave cuando: FFR<0,80, iFR<0,89 o QFR<0,80

TFG Natalia Bru, 2024.

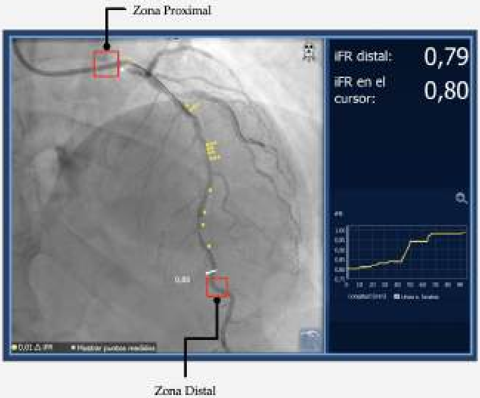
Estenosis en arterias coronarias

Imágenes Médicas

- Colaboración con la unidad de "Hemodinámica y Cardiología Intervencionista" del Hospital Puerta de Hierro de Madrid.
- Paciente varón de 66 años con obstrucciones coronarias en la arteria descendente anterior
- Imágenes de Tomografía Computarizada
- Imagen de co-registro de iFR
- Al paciente se le realizó un cateterismo con angioplastia

Imagen de co-registro iFR

- Punto amarillo: caída de iFR de 0,01
- Partimos de iFR = 1 en la zona proximal
- El iFR en la zona distal es 0,79



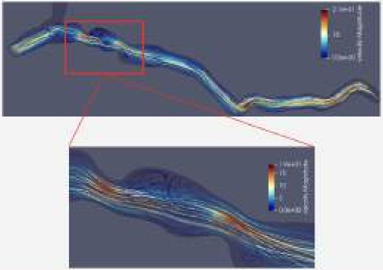
TFG Natalia Bru, 2024.

Estenosis en arterias coronarias

Modelo 1: a partir de imágenes de TC

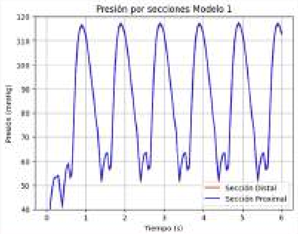
Velocidades y líneas de flujo

- Aumento local de la velocidad en la zona de las obstrucciones
- Aparece turbulencia



Presiones e IFR

- Presiones iguales en sección distal y proximal → resultado no representativo del caso clínico del paciente
- iFR = 0,995 ≈ 1 → caída de presión despreciable
- Necesidad de herramientas adicionales en construcción de modelos a partir de TC: IVUS, umbrales, etc.



TFG Natalia Bru, 2024.

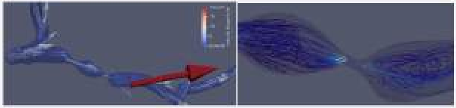
Estenosis en arterias coronarias

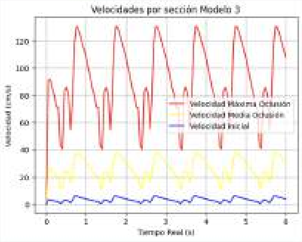
Modelo 3: estenosis de mayor grado

Velocidades y líneas de flujo

- Incremento de velocidad muy llamativo en la zona de obstrucción
- Variaciones en la dirección de velocidad de flujo
- Disminución de líneas de flujo tras la obstrucción e incremento de la turbulencia
- Media de velocidad por secciones y representación gráfica
  - Velocidad media en la zona de entrada
  - Velocidad media en la obstrucción principal
  - Velocidad máxima en la obstrucción principal (velocidad máxima en el modelo)
- Incrementos de velocidad en obstrucciones → Ley de continuidad de fluidos:

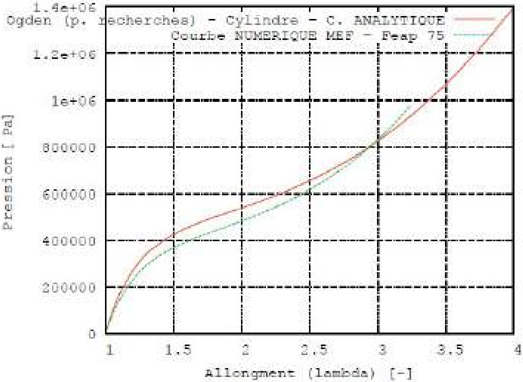
$$\boxed{A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2}$$

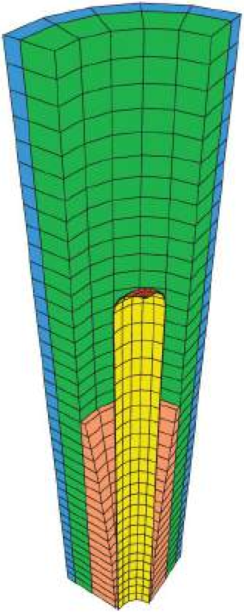




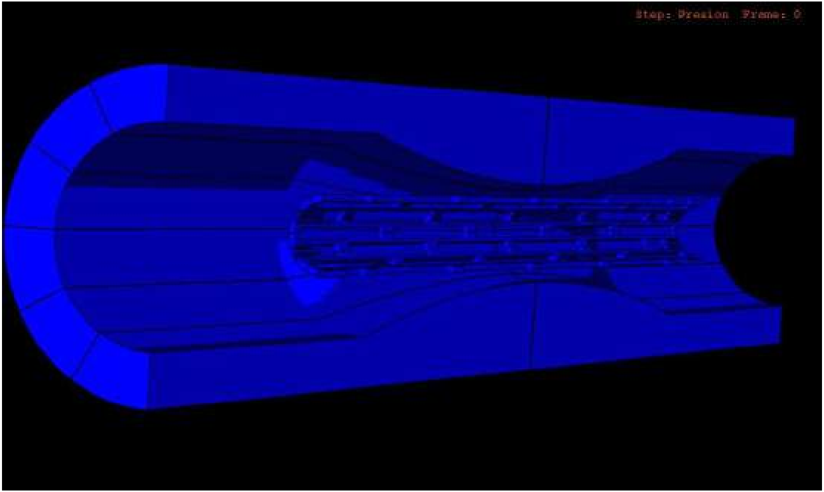
TFG Natalia Bru, 2024.

Simulación de angioplastia con balón





Simulación de angioplastia con balón y stent



Movie